フラクタル的トラフィックの諸性質と待ち行列長分布の近似的解析法

Characteristics of Fractal Traffic and Approximation Technique of Queueing Analysis

笠原正治[1]

Shoji Kasahara

要約

近年 LAN トラフィックには長期にわたって相関が続く傾向が観測され、従来数学モデルとして利用されてきたマルコフ過程に従う到着過程と実トラフィックの乖離が極端に指摘されるようになった。本稿では長期依存性 (Long Range Dependent: LRD) および自己相似性 (Self-Similar : SS) を有する到着過程について、それらの定義・性質を概観し、あわせて最近の研究動向を報告する。また fractional Brownian traffic (fBt) を到着過程とする待ち行列モデルに対し、待ち行列長の裾野分布に対する近似手法も解説する。

Contents

1 はじめに **2**

2 フラクタル的なトラフィック特性 **2**
2.1 無限大の分散現象 2
2.2 長期依存性 3
2.3 自己相似性 4
2.3.1 離散時間型自己相似性 4
2.3.2 離散時間型確率変数における自己相似性の定義 (2) 5
2.3.3 連続時間型自己相似性 8

3 長期依存性の有無 **9**
3.1 On-Off の 2 状態を持つ到着過程 9
3.1.1 有限マルコフ連鎖に従う場合 9
3.1.2 On・Off 期間が一般分布に従う場合 10
3.2 MAP 11

4 $M/G/\infty$ モデル **12**

5 Fractional Brownian Motion **13**
5.1 fBm を用いた到着過程 14
5.2 Crossover Property 14
5.3 fBt 入力を持つ待ち行列システムの近似解析 15

[1] 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
〒 630-01 奈良県生駒市高山町 8916-5 kasahara@is.aist-nara.ac.jp

6 大偏差理論による待ち行列長分布の近似解析 **16**
6.1 fBt の漸近対数モーメント母関数 16
6.2 Duffield-O'Connell のスケーリング手法 16
6.3 スケーリング手法による fBt 入力待ち行列の裾野分布近似 18

A (30) の導出 **19**

B (32) の導出 **20**

C 大きい裾野を持つ確率分布 **21**

1 はじめに

近年ネットワーク計測機器の発達に伴い、実際に稼働している LAN のトラフィックを高い精度で観測できるようになった。そのような状況の中、米国ニュージャージー州にある Bellcore Morristown Research and Engineering Center で 1989 年から 1992 年の間に研究所内の LAN トラフィックが観測された。得られたデータから、LAN のトラフィックにはフラクタル的な性質、自己相似性 (Self Similarity: SS) が見られるということが判明し、1993 年 ACM SIGCOMM でその概要が発表された[2]。その後 Ethernet LAN 以外に ISDN、WAN、DQDB MAN、ATM LAN などのネットワークでデータが計測され、統計的解析が行なわれた。その結果、そのようなネットワークを流れるトラフィックにも自己相似性や長期依存性 (Long Range Dependent: LRD) が見られることがわかってきた [7]。

本稿ではトラフィックのフラクタル的性質といわれている長期依存性と自己相似性について紹介し、従来性能評価で利用されてきた到着過程に対してそれらの性質の有無を調べる。続いて自己相似性を持つ代表的な到着過程である fractional Brownian traffic について紹介し、それを入力とする待ち行列システムの待ち行列長裾野分布を近似する手法について解説を行なう。

本稿の構成は以下の通りである。2章ではトラフィックのフラクタル的な性質として無限大の分散現象および長期依存性の定義を紹介する。長期依存性のところでは自己相似性の定義も紹介する。3 章では代表的な到着過程に対し、長期依存性の有無を調べる。4章では長期依存性を生成するトラフィックとして注目されている $M/G/\infty$ を概観する。5章では自己相似性を表現する代表的な確率過程 fractional Brownian Motion およびそれから生成される fractional Brownian traffic について解説を行なう。6章では長期依存性や自己相似性を有する到着過程にも応用できる大偏差理論による待ち行列長の近似解析法を紹介する。

2 フラクタル的なトラフィック特性

フラクタル的なトラフィック特性は無限大の分散現象 (infinite variance syndrome)、長期依存性、自己相似性の 3 つに大別される。ここではそれらを特徴づける条件を解説する [1, 7, 13, 14, 15]。

2.1 無限大の分散現象

イーサネット等の LAN トラフィックでは到着時間間隔 X の分布はかなり大きい裾野分布を持つことが知られている。特に X が次のような性質を持つとき、X は大きな裾野分布を持つ確率変数 (a heavy-tailed random variable) と呼ばれる。

$$P[X > x] \sim L_1(x)x^{-\alpha}, \qquad x \to \infty. \tag{1}$$

[2]拡張バージョンが文献 [15] として発表されている。

ここで $\alpha > 0$、$L_1(x)$ は無限遠 x に対して緩やかに変化する関数[3]である。また $a(x) \sim b(x)$ は $x \to \infty$ のとき $a(x)/b(x) \to 1$ を意味する。(1) は $1 < \alpha < 2$ のとき有界な平均を持ち、無限大の分散を持つ。この性質を無限大の分散現象 (infinite variance syndrome) と呼ぶ。

それに対し、過去に多くのトラフィックモデルとして扱われてきた確率分布は小さな裾野分布 (a light-tailed distribution) を持つ。小さな裾野分布の性質は次の式で特徴付けることができる。

$$P[X > x] \sim L_2(x)e^{-x}, \qquad x \to \infty. \tag{2}$$

ここで $L_2(x)$ は無限遠で緩やかに変化する関数である。(2) 式より、ポアソン過程は小さな裾野分布を持つ確率過程の典型的な例であることがわかる。つまりポアソン過程は小さな裾野分布しか持たないため、実際の観測データが示すような無限大の分散現象を表現することができない。

付録 Cに裾野が大きい確率分布を挙げておく。

2.2 長期依存性

離散時間における $X = \{X_t : t \geq 0\}$ を平均 $1/\mu$、分散σ^2、自己相関関数 $r(k)$[4]を持つ共分散定常確率過程とする。実際のアプリケーションでは例えば離散時間におけるスロット t での到着客数が X_t に対応する [15]。無限遠で緩やかに変化する関数 $L_3(k)$ に対し、

$$r(k) \sim L_3(k)k^{2H-2}, \qquad k \to \infty, 1/2 < H < 1, \tag{3}$$

が成立するならば、X は長期依存性 (long range dependent) を持つという。それに対し、無限遠で緩やかに変化する関数 $L_4(k)$ に対し、

$$r(k) \sim L_4(k)\rho^k, \qquad k \to \infty, 0 < \rho < 1, \tag{4}$$

が成立するならば、Xは短期依存性 (short range dependent) を持つという。以下離散時間型長期依存性を特徴付ける性質を列挙する。

- 自己共分散関数について
$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Cov}X_t, X_{t+k} = \infty, \tag{5}$$
が成立する。
- m 個の時点における標本平均の分散が $1/m$ よりも遅く減少する。つまり
$$\mathrm{Var}X^{(m)} \sim \alpha m^{-\beta}, \text{ as } m \to \infty,$$
が成立する。ここで βは $0 < \beta < 1$ を満たす定数である。($H = 1 - \beta/2$ と同じ。)
- 原点におけるスペクトルが特異である。
- $m \to \infty$ のとき、平均過程 $X_k^{(m)}$は 2 次の白色雑音に近付かない。

[3]すべての $t > 0$ に対し、
$$\lim_{x \to \infty} L_1(tx)/L_1(x) = 1,$$
が成立する関数を、無限遠において緩やかに変化する関数 (a slowly varying function at infinity) と呼ぶ。

[4][1] の定義では $r(k) = \mathrm{Cov}X_t, X_{t+k}/\mathrm{Var}X_t$となっており、通常の自己相関関数と異なることに注意する。一般の自己相関関数 (auto correlation function) は $r(k) = \mathrm{Cov}X_t, X_{t+k}$で定義される。Cox の定義は自己相関係数と呼ばれる。ほとんどの論文が自己相関関数として Cox の 自己相関係数を参照しているが、中には自己相関関数と混同しているもの (例えば [10] や [11]) もある。

連続時間については累積客数過程に対して長期依存性の定義が存在する [9]。時刻 $t \in (-\infty, \infty)$ までに到着した客数を A_t とする。また $[s,t)$ 間に到着する客数を $A(s,t) = A_t - A_s$とおく。$s < t \leq u < v$ において相関係数の極限

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\mathrm{Cov} A(\alpha s, \alpha t), A(\alpha u, \alpha v)}{\sqrt{\mathrm{Var} A(\alpha s, \alpha t) \cdot \mathrm{Var} A(\alpha u, \alpha v)}} \tag{6}$$

が 0 に収束するとき、A_t は短期依存性を持つという。それ以外のとき、A_t は長期依存性を持つという。

2.3 自己相似性

2.3.1 離散時間型自己相似性

はじめに [1] による離散時間確率変数における自己相似性の定義を紹介する。2 次定常過程 (second-order stationary process) $\{X_k : k \geq 0\}$ を集めて平均化することにより生成される過程 $\{X_k^{(m)} : k \geq 0, m = 1, 2, \cdots.\}$ を考える。X_k は (3) で表される自己相関関数 $r(k)$ を持つと仮定する。$X_k^{(m)}$ は次式で定義される。

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_{m(k-1)+i}, \qquad k \geq 1.$$

また、対応する自己相関関数を $r^{(m)}(k)$ とおく。自己相似性には次の 2 つの定義が存在する。

1. すべての $m = 1, 2, \cdots$ に対し、

$$\mathrm{Var} X^{(m)} = \sigma^2 m^{2H-2}, \tag{7}$$

と

$$r^{(m)}(k) = r(k), k \geq 0, \tag{8}$$

が成立するとき、X は Hurst パラメータ H を持つ厳密に 2 次自己相似 (exactly second-order self-similar) な確率過程という。

2. 十分大きな m に対して (7) と

$$r^{(m)}(k) \to r(k), \text{ as } m \to \infty, \tag{9}$$

が成立するならば、X は Hurst パラメータ H を持つ漸近的に 2 次自己相似 (asymptotically second-order self-similar) な確率過程という。

[1] による厳密な自己相似性の定義は、(7) と (8) が同時に成立することを要求しているが、[14] はその冗長性を指摘し、簡略な定義を提案している。まず任意の関数 $f(x)$ に対してδ^2 を次のような中心二次差分作用素 (central second difference operator) として定義する。

$$\delta^2(f(x)) = \{f(x+1) - f(x)\} - \{f(x) - f(x-1)\}.$$

この作用素を用いると離散時間型確率変数に対する自己相似性の定義は以下のように言い換えることができる。(詳細は [14] を参照)

定義 2.1　条件

$$r(k) = \frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta}). \tag{10}$$

が成立するならば X は Hurst パラメータ $H = 1 - \beta/2$ を持つ厳密に *2* 次自己相似な確率過程であるという。

同様に漸近的な自己相似性についても以下のような定義ができる。

定義 2.2 $m \to \infty$ のとき

$$r^{(m)}(k) \to \frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta}), \tag{11}$$

が成立するならば、X は Hurst パラメータ $H = 1 - \beta/2$ を持つ漸近的に *2* 次自己相似な確率過程という。

注意として、(10) はすべての $m = 1, 2, \ldots$ に対して、

$$r^{(m)}(k) = r(k). \tag{12}$$

が成立することを意味する。これを次節で示す。

特に興味があるのは Hurst パラメータの値が $0.5 < H < 1$ のときであり、このとき過程は長期依存性も有することに注意する。

2.3.2　離散時間型確率変数における自己相似性の定義 (2)

ここでは定義 2.1と 2.2 に対して等価な別の定義を示す。以下で示す厳密に 2 次自己相似な定義は [14]、漸近的に 2 次自己相似な定義については [13] を参照している。

定理 2.3　過程 X が *(10)* を満足する必要十分条件は、すべての $m = 1, 2, \ldots$ に対して次式が成立することである。

$$Var(X^{(m)}) = \sigma^2 m^{-\beta}. \tag{13}$$

$\mathrm{Var}(X_t)$ と $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k})$ が以下の関係を満足することに注意して証明を行う。

$$\mathrm{Var}(X^{(m)}) = \frac{\sigma^2}{m} + \frac{2}{m^2}\sum_{k=1}^{m}(m-k)\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}), \tag{14}$$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \frac{1}{2}\delta^2(k^2\mathrm{Var}(X^{(k)})). \tag{15}$$

定理 2.3 の証明　もし X が (10) を満たすとき、(14) から

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X^{(m)}) &= \frac{\sigma^2}{m} + \frac{2\sigma^2}{m^2}\sum_{k=1}^{m}(m-h)r(k) \\
&= \frac{\sigma^2}{m} + \frac{2\sigma^2}{m^2}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{s} r(k) \\
&= \frac{\sigma^2}{m}\left\{1 + \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{s}\delta^2(k^{2-\beta})\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{m}\left[1+\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{s}\left\{(k+1)^{2-\beta}-k^{2-\beta}\right\}-\left\{k^{2-\beta}-(k-1)^{2-\beta}\right\}\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{m}\left\{1+\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m-1}(s+1)^{2-\beta}-1-s^{2-\beta}\right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{m}\left\{1+\frac{1}{m}\left(m^{2-\beta}-(m-1)-1\right)\right\} \\
&= \sigma^2 m^{-\beta}.
\end{aligned}
$$

逆に X が (13) を満たすと仮定すると (15) から

$$
r(k)=\frac{1}{2}\frac{\delta^2(k^2\mathrm{Var}(X^{(k)}))}{\sigma^2}=\frac{1}{2}\frac{\delta^2(k^2\sigma^2k^{-\beta})}{\sigma^2}=\frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta}).
$$

以上より定理が証明された。□

次に (10) または (13) が (12) と同値であることを示す。

定理 2.4　もし X が *(10)* を満たすとき、すべての $m=1,2,\ldots$ に対して次式が成立する。

$$
r^{(m)}(k)=r(k).
$$

定理 2.4 の証明　X が (10) を満たすと仮定する。今、平均化過程 $X'=X^{(m)}$ を考える。(15) を X' に適用することにより、次式を得る。

$$
\mathrm{Cov}(X'_t,X'_{t+k})=\frac{1}{2}\delta^2(k^2\mathrm{Var}(X'^{(k)})). \tag{16}
$$

$$
X'^{(k)}=X^{(km)}.
$$

に注意すると、(16) から

$$
\mathrm{Cov}(X_t^{(m)},X_{t+k}^{(m)})=\frac{1}{2}\delta^2(k^2\mathrm{Var}(X^{(km)})). \tag{17}
$$

$\mathrm{Var}(X^{(m)})$ で割ることにより次式を得る。

$$
r^{(m)}(k)=\frac{1}{2}\frac{\delta^2(k^2\mathrm{Var}(X^{(km)}))}{\mathrm{Var}(X^{(m)})}=\frac{1}{2}\frac{\delta^2(k^2\sigma^2(km)^{-\beta})}{\sigma^2m^{-\beta}}=\frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta})=r(k).\ \square
$$

$L(x)$ を無限遠で緩やかに変化する関数とする。このとき漸近的に 2 次自己相似な確率過程について以下の定理を得る。

定理 2.5　X が *(11)* を満足する必用十分条件は、$m\to\infty$ のとき次式が成立することである。

$$
Var(X^{(m)})\sim L(m)m^{-\beta}. \tag{18}
$$

定理 2.5 の証明　X を 自己相関関数 $r(k)$ が (18) を満足する確率過程とする。今、平均化過程 $X' = X^{(m)}$ を考える。(17) の導出と同様に、(14) から

$$\mathrm{Var}(X^{(hm)}) = \frac{\mathrm{Var}(X^{(m)})}{h} + \frac{2}{h^2}\sum_{k=1}^{h}(h-k)\mathrm{Cov}(X_t^{(m)}, X_{t+k}^{(m)}). \tag{19}$$

(19) を $\mathrm{Var}(X^{(m)})$ で割ることにより次式を得る。

$$\frac{\mathrm{Var}(X^{(hm)})}{\mathrm{Var}(X^{(m)})} = \frac{\mathrm{Var}(X^{(m)})}{h} + \frac{2}{h^2}\sum_{k=1}^{h}(h-k)\mathrm{Cov}(X_t^{(m)}, X_{t+k}^{(m)}).$$

$m \to \infty$ のとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(X^{(hm)})}{\mathrm{Var}(X^{(m)})} &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{h} + \frac{2}{h^2}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{k=1}^{s} r^{(m)}(k) \\
&= \frac{1}{h}\left\{1 + \frac{1}{h}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{k=1}^{s}\delta^2(k^{2-\beta})\right\} \\
&= h^{-\beta}.
\end{aligned} \tag{20}$$

従って $m \to \infty$ のとき、

$$\mathrm{Var}(X^{(hm)}) \sim \mathrm{Var}(X^{(m)})h^{-\beta}.$$

今 $m' = hm$ とする。このとき $m \to \infty$ とすると

$$Var(X^{(m')}) \sim L(m')m'^{-\beta},$$

ここで

$$L(m') = \left(\frac{m'}{h}\right)^{\beta}\mathrm{Var}(X^{(\frac{m'}{h})}),$$

かつ

$$\begin{aligned}
\lim_{m'\to\infty}\frac{L(nm')}{L(m')} &= \lim_{m'\to\infty}\frac{\left(\frac{nm'}{h}\right)^{\beta}\mathrm{Var}(X^{(\frac{nm'}{h})})}{\left(\frac{m'}{h}\right)^{\beta}\mathrm{Var}(X^{(\frac{m'}{h})})} \\
&= \lim_{m'\to\infty} n^{\beta}\frac{\mathrm{Var}(X^{(\frac{nm'}{h})})}{\mathrm{Var}(X^{(\frac{m'}{h})})} \\
&= n^{\beta}n^{-\beta} \qquad ((20)\text{ より}) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

である。以上で必要性を証明した。

十分性を示すために X が (18) を満足すると仮定する。このとき (15) から次式を得る。

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} r^{(m)}(k) &= \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\frac{\delta^2(k^2\mathrm{Var}(X_t^{(km)}))}{\mathrm{Var}(X^m)} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\frac{\delta^2(k^2L(km)(km)^{-\beta})}{L(m)m^{-\beta}} \\
&= \frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta})\lim_{m\to\infty}\frac{L(km)}{L(m)} \\
&= \frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta}).
\end{aligned}$$

これにより十分性を示した。□

定理 2.3 と 2.5 より、平均化過程の分散に関して以下の自己相似性の定義が得られる。

定義 2.6　すべての $m = 1, 2, \ldots$ に対して

$$Var(X^{(m)}) = \sigma^2 m^{-\beta},$$

が成立するならば、X は Hurst パラメータ $H = 1 - \beta/2$ を持つ厳密に 2 次自己相似な確率過程であるという。

定義 2.7 $m \to \infty$ のとき

$$Var(X^{(m)}) \sim L(m) m^{-\beta},$$

が成立するとき、X は Hurst パラメータ $H = 1 - \beta/2$ を持つ漸近的に 2 次自己相似な確率過程であるという。

2.3.3　連続時間型自己相似性

連続時間における一般的な確率過程の自己相似性については [4] および [9] で紹介されている。[4] によると確率過程 Y_t に対し、次の自己相似性が定義されている。

1. 任意の $\alpha > 0$ と正の整数 n に対し、

   $$(Y_{\alpha t_1}, \cdots, Y_{\alpha t_n}) \overset{\mathrm{d}}{\sim} (\alpha^H Y_{t_1}, \cdots, \alpha^H Y_{t_n}),$$

   すなわち $Y_{\alpha t}$ と $\alpha^H Y_t$ が同じ有限次元分布を持つとき[5]、Y_t は Hurst パラメータ H を持つ厳密に自己相似 (strictly self-similar) な確率過程と呼ばれる。

2. 適当に正規化された $Y_{\alpha t}$が $\alpha \to \infty$ で厳密に自己相似な確率過程に弱収束するとき、Y_t は Hurst パラメータ H を持つ漸近的に自己相似な確率過程であるという。

2 次の統計的性質 (分散・共分散など) までの性質を考慮すれば十分なとき、平方が可積分である確率過程 Y_t に対して以下の自己相似性の定義が用いられる。

1. 任意の $\alpha > 0$ に対して Y_t が

   $$\mathrm{Var} Y_{\alpha t} = \alpha^{2H} \mathrm{Var} Y_t,$$

   を満たすとき、$Y_{\alpha t}$と$\alpha^H Y_t$は同じ相関構造を持つ、または過程 Y_t は 2 次の自己相似性 (second-order self-similar) を持つという。

2. 適当に正規化された $Y_{\alpha t}$ の 2 次の統計的性質が$\alpha \to \infty$ で 2 次の自己相似性を持つ過程の性質に収束するとき、Y_t は漸近的に 2 次自己相似な確率過程と呼ばれる。

$H > 1/2$ における漸近的 2 次自己相似性は、その過程が長期依存性を有することと等価である [4]。

2 次の自己相似性の定義から、累積到着客数過程 A_t が 2 次の自己相似性を有するならば、A_t は

$$\mathrm{Var} A_{\alpha t} = \alpha^{2H} \mathrm{Var} A_t \tag{21}$$

を満足する。また定義からポアソン過程は $H = 1/2$ の 2 次自己相似過程である。さらに、ガウス過程は自己相似かつ 2 次の自己相似な過程であることも確かめられる。

短期依存性、長期依存性および自己相似性の関係を図 1に示す。

[5] $\overset{\mathrm{d}}{\sim}$は分布が一致することを示す。

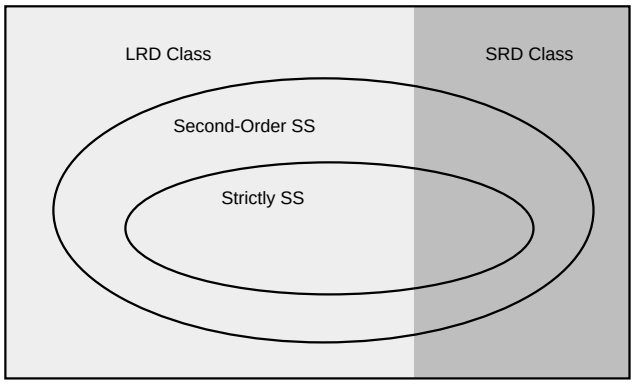

Figure 1: SRD, LRD および 2 次 SS の関係

3 長期依存性の有無

ここでは長期依存性の有無を 2 種類の到着過程について調べる。一つめは離散時間定義に照らして On-Off 呼源を、もう一つは連続時間定義に照らして MAP を取り扱う。

3.1 On-Off の 2 状態を持つ到着過程

ここでは On と Off の 2 状態を持つ呼源について長期依存性を持つかどうかを調べる。はじめに On-Off が有限マルコフ連鎖に従う場合を考え、次に On、Off が一般的な分布に従う場合について考える。

3.1.1 有限マルコフ連鎖に従う場合

On と Off の遷移が離散時間有限マルコフ連鎖で記述できる単一呼源モデルを考える。時刻 t における呼源の状態を J_tとし、$J_t \in \{\mathrm{OFF}, \mathrm{ON}_1, \cdots, \mathrm{ON}_{m-1}\}$ とおく。このマルコフ連鎖の $m \times m$ 遷移確率行列を A とし、その定常状態確率ベクトルを $\boldsymbol{\pi}$ とおく。時刻 t における呼源の状態を X_t で表す。ここで

$$X_t = \begin{cases} 0, & J_t = \mathrm{OFF}, \\ 1, & \text{その他}. \end{cases}$$

とする。X_t は時刻 t での到着客数でもあることに注意しよう。このとき $\mathrm{Cov}X_0, X_t$ は次式で表される。

$$\mathrm{Cov}X_0, X_t = \boldsymbol{\pi}\Lambda(A^t - \boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi})\Lambda\boldsymbol{e}. \tag{22}$$

ここで $\Lambda = \mathrm{diag}\{0, 1, \cdots, 1\}$ である。これより t の無限和は次のようになる。

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathrm{Cov}X_0, X_t = \boldsymbol{\pi}\Lambda(I - A + \boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}(I - \boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi})\Lambda\boldsymbol{e} < \infty. \tag{23}$$

従って有限マルコフ連鎖に従う ON-OFF 呼源は長期依存性を持たないことがわかる。

さて、このような呼源が K 個多重される場合のトラフィックについて考えてみよう。各 On-Off 呼源は独立に振る舞うと仮定すると

$$\mathrm{Cov}X_0^{(1)} + \cdots + X_0^{(K)}, X_t^{(1)} + \cdots + X_t^{(K)} = K \cdot \mathrm{Cov}X_0, X_t.$$

従ってある t に対して $\mathrm{Cov}X_0, X_t \neq 0$ のとき

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathrm{Cov}X_0^{(1)} + \cdots + X_0^{(K)}, X_t^{(1)} + \cdots + X_t^{(K)} = K \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \mathrm{Cov}X_0, X_t \to \infty, \text{ as } K \to \infty.$$

となることがわかる。つまり、個々の呼源が有限マルコフ連鎖で表現されるような場合でも相関があってかつ呼源の個数が無限に存在すれば長期依存性を持つことがわかる。

本題と少しはずれるが、有限マルコフ連鎖で長期依存性に近い性質を実現させようという研究が近年活発に行われている。これは、従来の待ち行列理論的枠組みを利用することが目標であり、どれだけの精度 (タイムスケール) で長期依存性を表すことができるかが鍵となる。例えば [11] は仮想長期依存型トラフィック (pseudo self-similar traffic) という名前で次のような A と Λ を提案している。

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 1/a - 1/a^2 - \cdots - 1/a^{n-1} & 1/a & 1/a^2 & \cdots & 1/a^{n-1} \\ q/a & 1 - q/a & 0 & \cdots & 0 \\ (q/a)^2 & 0 & 1 - (q/a)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q/a)^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 - (q/a)^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

[11] では A とΛで生成された X_t について、標本平均過程 $X^{(m)}$ のどの m の値まで自己相似性を表しているかをシミュレーションにより示した。ここでは妥当なタイムスケールにおいて求められる Hurst パラメータを、局所的に一致しているという意味で Local Hurst Parameter と呼んでいる。

3.1.2 On・Off 期間が一般分布に従う場合

次に On 期間 U、Off 期間 Dがともに一般分布に従うときの単一呼源を考える。このとき以下の母関数を定義する。

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{U = n\} z^n,$$
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{D = n\} z^n.$$

また On 期間の残余 $\widehat{U}$の母関数を $\widehat{G}(z)$ とおく。このときスロット t の On-Off の状態を表す X_t について次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{Cov}X_0, X_h = \mathrm{Var}X + \rho \Bigg\{ & \sum_{h=1}^{\infty} \Pr\{\widehat{U} \geq h\} \\ & + \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{h-2} \Pr\{\widehat{U} = k\} \sum_{j=1}^{h-k-1} m(j) \Pr\{G \geq h - k - j\} \\ & - \sum_{h=1}^{\infty} \rho \Bigg\}, \end{aligned} \quad (26)$$

ここで

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(j)z^j = \frac{F(z)}{1-F(z)G(z)}.$$

(26) に対して母関数を求めると次式を得る。

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{Cov}X_0, X_h)z^h = \rho \cdot \frac{(1-\rho)\{1-F(z)G(z)\} - z\widehat{G}(z)\{1-F(z)\}}{(1-z)\{1-F(z)G(z)\}}. \tag{27}$$

これより

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{\infty}\mathrm{Cov}X_0, X_h &= \left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{Cov}X_0, X_h)z^h\right\}_{z=1} \\ &= \frac{E[D]}{E[D]+E[U]} + \frac{E[U^2]}{2E[U](E[D]+E[U])^2} \\ &\quad + \frac{E[U]\{E[D^2]-2(E[D])^2\}}{2(E[D]+E[U])^2}.\end{aligned} \tag{28}$$

(28) の右辺第 2 項から On または Off 期間の 2 次モーメントが発散すれば (28) が発散し、長期依存性を持つことがわかる。言い換えると、On または Off 期間が無限大の分散現象を示すために長期依存性を持つことがわかる。呼源の数が長期依存性の有無に関係ないことは前節の結果と比べると興味深い。

3.2 MAP

ここでは Markovian Arrival Process(MAP) に対して長期依存性を調べてみよう。MAP の定義については [2, 18] を参照されたい。

2 つの $M \times M$ 行列 C と D で表現される MAP を考える。位相数 M は有限であると仮定する。C の対角要素は負であり、Cのその他の要素と Dのすべての要素は非負である。$\boldsymbol{e}$ をすべての成分が 1 の列ベクトル、$\boldsymbol{\pi}$を到着過程の位相の定常状態確率ベクトルとすると以下の式が成立する。

$$(C+D)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi}(C+D) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{e} = 1.$$

また平均到着率は $\lambda = \boldsymbol{\pi}D\boldsymbol{e}$で表現される。

$Q = C + D$とすると付録 Aより、$t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}A(t_1, t_2) &= \lambda(t_2-t_1) + 2\boldsymbol{\pi}D\left\{e^{Q(t_2-t_1)} - Q(t_2-t_1) - I\right\} \\ &\quad \times(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi} - Q)^{-2}D\boldsymbol{e}, \qquad (29) \\ \mathrm{Cov}A(t_1, t_2), A(t_3, t_4) &= \boldsymbol{\pi}D\left\{e^{Q(t_3-t_2)} - e^{Q(t_4-t_2)} - e^{Q(t_3-t_1)} + e^{Q(t_4-t_1)}\right\} \\ &\quad \times(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi} - Q)^{-2}D\boldsymbol{e}. \qquad (30)\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{Qt}}{t} = 0,$$

に注意すると

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\mathrm{Cov}A(\alpha t_1, \alpha t_2), A(\alpha t_3, \alpha t_4)}{\sqrt{\mathrm{Var}A(\alpha t_1, \alpha t_2)\cdot \mathrm{Var}A(\alpha t_3, \alpha t_4)}} = 0. \tag{31}$$

従って MAP に従うトラフィックは長期依存性を持たない。これより、ポアソン過程や MMPP などの位相型到着過程はすべて短期依存型となることがわかる。

雑記

有限位相数の場合は長期依存性を持たないことを示したが、位相数が無限大の場合、たぶん長期依存性を表現できるのではないかと著者は感じている。位相型分布はあらゆる確率分布を任意の精度で近似できること、そして MAP は定常点過程を任意の精度で近似できる[6]という事実から長期依存性を有する定常的な到着過程は任意の精度で MAP で近似できるはずだからである。

4 $M/G/\infty$ モデル

$M/G/\infty$ の客数過程は長期依存性を有するトラフィックを生成する代表的な確率過程として知られている。ここでは [10] による $M/G/\infty$ の性質を紹介する。

客は到着率λを持つポアソン過程に従ってシステムに到着する。サービス時間は一般的な確率分布関数 $F(x)$ に従う。サービス時間の平均は $1/\mu$ とする。サーバの数は無限個存在する。ここで X_t を時刻 t におけるシステム内客数過程とする。実際の応用では X_t が時刻 t における到着客数を表すことに注意しよう。このとき、X_t の自己相関関数 $r(k)$ は次式で表される[7]。

$$r(k) = \mu \int_k^\infty \{1 - F(x)\} dx. \tag{32}$$

証明は付録 B を参照されたい。

ここで $F(x)$ がパレート分布と対数正規分布の 2 つの場合について $r(k)$ の性質を調べてみよう。

- パレート分布

  (32) は次のようになる。

  $$r(k) = \frac{\mu a^\alpha}{(\alpha - 1)} k^{1-\alpha}.$$

  $a \geq 0$ および $1 < \alpha < 2$ のとき、上式は (3) を満足することから、X_t は長期依存性を持つことがわかる。

- 対数正規分布

  ここでは標準正規分布の裾野分布を近似することで $r(k)$ の性質を調べる。標準対数正規分布 (付録 C 中の定義式で $\zeta = 0, \sigma = 1$) において十分大きな x に対し、以下の近似が成立する。

  $$1 - F(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \log x} \exp\left\{ -\frac{(\log x)^2}{2} \right\}.$$

  これより以下の $r(k)$ の近似式を得る。

  $$\begin{aligned} r(k) &\simeq \mu \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \log x} \exp\left\{ -\frac{(\log x)^2}{2} \right\} dx \\ &\simeq \mu \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \log x} x^{-(\log x)/2} dx. \end{aligned}$$

[6]「定常点過程に対して稠密である」という。

[7][10] で $r(k)$ は自己共分散関数 $\mathrm{Cov} X_t, X_{t+k}$ として計算されている。ここでは Cox の定義に従って $r(k)$ を表現する。

ここで十分大きな K に対し、

$$\begin{aligned}\sum_{k=K}^{\infty} r(k) &\simeq \sum_{k=K}^{\infty} \mu \int_{k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\log x} x^{-(\log x)/2} dx \\ &\simeq \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=K}^{\infty} \sum_{x=k}^{\infty} \frac{1}{(\log x) x^{(\log x)/2}} \\ &\simeq \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x=K}^{\infty} \frac{x-K+1}{(\log x) x^{(\log x)/2}}.\end{aligned}$$

また十分大きな x に対し、

$$\frac{x-K+1}{(\log x) x^{(\log x)/2}} \leq \frac{x}{x^{(\log x)/2}} \leq \frac{1}{x^2},$$

が成立する。ここで $\sum_{x=1}^{\infty} 1/x^2$ は有限であるから$\sum_{x=K}^{\infty} r(k)$ は有限である。従ってサービス時間が対数正規分布に従う $M/G/\infty$ モデルは長期依存性を持たない。

以上 2 つの例からわかるように $M/G/\infty$ モデルを扱うとき、サービス時間分布の選択には十分気をつける必要がある。

5 Fractional Brownian Motion

Fractional Brownian Motion (以下 fBm) はコルモゴロフによって発見された確率過程であり[8]、[6] で詳細な性質が調べられた。そして [8] においてイーサネットに代表されるコネクションレス通信システムの到着過程として採用された。ここでは [9] に基づいて fBm を解説する。

Hurst パラメータ $H \in [1/2, 1)$ を持つ正規化された fBm は以下の性質を持つ確率過程 $\{Z_t : -\infty < t < \infty\}$ として定義される。

1. Z_t は定常増分 (stationary increments[9]) の性質を持つ。
2. すべての t に対し、
$$Z_0 = 0, \qquad E[Z_t] = 0.$$
3. すべての t に対し、
$$E[Z_t^2] = |t|^{2H}.$$
4. Z_t は連続である。
5. Z_t はガウス過程[10]である。

$H = 1/2$ のとき fBm は標準のブラウン運動となる。

2 つの重ならない時間区間における増分の共分散は常に正で以下で表現される。

$$\mathrm{Cov} Z_{t_2} - Z_{t_1}, Z_{t_4} - Z_{t_3} = \frac{1}{2}\left\{(t_4 - t_1)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} + (t_3 - t_2)^{2H} - (t_4 - t_2)^{2H}\right\}, \qquad (33)$$

ここで $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ である。

[8] [9] による。

[9] 増分 $Z_{t+h} - Z_t$ は時間間隔 h にのみ依存し、t に依存しない。

[10] 任意の n における$-\infty < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ に対し、$(Z_{t_1}, \cdots, Z_{t_n})$ が n 次元正規分布に従うものをガウス過程と呼ぶ。詳しくは例えば [17] を参照されたい。

5.1 fBm を用いた到着過程

本節では [8, 9] で導入された fBm を用いた到着過程について解説する。

A_t を到着過程、m を平均到着率、a を分散係数とする。このとき fracitional Brownian traffic (以下 fBt) は以下のように定義される。

$$A_t = mt + \sqrt{am}Z_t, \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{34}$$

ここで Z_t は Hurst パラメータ H を持つ fBm である。$H = 1/2$ のとき、A_t を Brownian traffic と呼ぶ。A_t の平均、分散は次のようになる。

$$\begin{aligned} EA_t &= mt, \\ \mathrm{Var}A_t &= am|t|^{2H}. \end{aligned}$$

従って $\mathrm{Var}A_{\alpha t} = \alpha^{2H}\mathrm{Var}A_t$ が成立するので A_t は自己相似性を有する到着過程である。

Z_t は負の値も取りうる確率変数のため、増分 $A_{t+\tau} - A_t$が負の値を取る場合が考えられる。しかしながらもし $a << 1$ ならば増分が負になる確率は無視できるようになる [5]。

次に K 個の独立な fBt の重ね合わせを考えてみよう。$A_t^{(i)}(i = 1, \cdots, K)$ を平均到着率 m_i、共通のパラメータ a と H を持つ fBt と定義する。

$$A_t = \sum_{i=1}^{K} A_t^{(i)}, \qquad m = \sum_{i=1}^{K} m_i,$$

とおくと A_t は以下のように表現できる。

$$A_t = mt + \sqrt{am}Z_t,$$

ここで Z_t は Hurst パラメータ H を持つ fBm である。重ね合わせがこのように表現できることから、Hと a をトラフィックの質 (quality)、m をトラフィックの量 (quantity) として特徴づけることができる。

5.2 Crossover Property

[5] では fBt における H の質的意味に関して以下の興味深い 2 点の性質を発見している。$H_1 < H_2$ とおく。

- ある棄却率 p を与えたとき、次のような性質を持つサービス率$\hat{\mu}$ が存在する。
  - $\mu \leq \hat{\mu}$ のとき、 H_1 をもつ fBt は H_2 をもつ fBt よりも少ないバッファ量で p を達成する。すなわち Hurst パラメータの値が小さい fBt は棄却率を小さくする傾向にある。
  - $\mu > \hat{\mu}$ のとき、 H_2 をもつ fBt は H_1 をもつ fBt よりも少ないバッファ量で p を達成する。すなわち Hurst パラメータの値が大きい fBt は棄却率を小さくする傾向にある。
- 独立、同一で同じパラメータ集合 $\{m, a, H\}$ を持つ複数の fBt を多重する場合を考える。十分大きな数の fBt を多重化するとき、H_2 の fBt の方が H_1 よりも大きな多重効果を得る。つまり、非常に多くの数の呼源を多重化する場合、Hurst パラメータの値が大きい fBt はより多くの数を多重することができる。

この結果は fBt についてのみ証明されているが漸近的に自己相似なクラスのトラフィックに対しても同様の性質が見られることがシミュレーションによって確認されている。

5.3 fBt 入力を持つ待ち行列システムの近似解析

fBt を入力とする待ち行列システムにおいて、性能評価量の厳密な解析方法は残念ながら確立されていない。その代わりシステムを近似的に解析する研究が活発に行なわれている。本節では [8] による Fractional Gaussian Noise(FGN) の特性に着目した近似方法を紹介する。また次章では [3] による大偏差理論を用いた近似方法を解説する。

[8, 9] では fractional Brownian Motion Storage Model を提案した。システムは無限個の待合室を持ち、サービス率μ は一定、到着過程は (34) で表される fBm に従うと仮定する。このとき仮想待ち時間 (virtual waiting time) 過程 $V(t)$ を次式で定義する。

$$V(t) = \sup_{s \le t}\{A_t - A_s - \mu(t-s)\}. \tag{35}$$

FGN の性質から、$V(t)$ は非負値をとる定常過程であり、$m < \mu$ のときほとんど確実に有限な[11]値をとることが示される。詳しくは [8] およびそこに挙げられている文献を参照されたい。

$V(t)$ の裾野分布について以下のような下限をとることができる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\{V(t) > x\} &= \mathrm{Prob}\{V(0) > x\} \\ &\ge \max_{t \ge 0} \mathrm{Prob}\{A_t > \mu t + x\} \\ &\ge \max_{t \ge 0} \bar{\Phi}\left(\frac{(\mu - m)t + x}{\sqrt{am}t^H}\right). \end{aligned} \tag{36}$$

ここで $\bar{\Phi}(\cdot)$ は正規分布の補分布関数である。(36) は

$$t = \frac{Hx}{(1-H)(\mu - m)}, \tag{37}$$

のとき最大値を取る。これを (36) に代入すると次式を得る。

$$P(V > x) \ge \bar{\Phi}\left(\frac{(\mu - m)^H x^{1-H}}{\sqrt{am}H^H(1-H)^{1-H}}\right). \tag{38}$$

ここで正規分布の補分布に対する既知の近似表現を用いると以下の下限式を得る。

$$P(V > x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + \sqrt{c}x)} \exp\left(-cx^{2-2H}\right), \tag{39}$$

ただし

$$c = \frac{(\mu - m)^{2H}}{2amH^{2H}(1-H)^{2-2H}}. \tag{40}$$

$H = 1/2$、$a = 1$(Brownian traffic) のとき (39) から次の近似式が導かれる。

$$P(V > x) \sim \exp\left(-2\frac{\mu - m}{m}x\right), \tag{41}$$

(41) は高負荷での $M/D/1$ 待ち行列長裾野分布の近似式となっている [8]。

[11] almost surely finite

6　大偏差理論による待ち行列長分布の近似解析

近年 ATM 交換器の多重化部分のモデル化において、大偏差理論およびそれに基づく実行帯域の研究がさかんに行われている。以下実行帯域をもとにしてセル棄却率を近似する枠組みを簡単に述べる。詳しい議論は文献 [12] や [16] を参照されたい。

到着過程 A_t の漸近対数モーメント母関数 $h(\theta)$ を次式で定義する。

$$h(\theta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E[e^{\theta A_t}]. \tag{42}$$

交換器の伝送容量を μ とおく。このとき $h(\theta)/\theta < \mu$ で最大の $h(\theta)/\theta$を与えるθ^* に対し、大きさ b のバッファにおけるセル棄却率は無限大のバッファ容量を持つシステムのバッファ内蓄積量 Q に関連づけて次式で近似される。

$$\Pr(Q > b) \approx e^{-\theta^* b}, \qquad \text{as } b \to \infty. \tag{43}$$

ここで $h(\theta)/\theta$ を実行帯域と呼ぶ。漸近対数モーメント母関数 $h(\theta)$ はセル棄却率を近似するとき重要な役割を果たす。

6.1　fBt の漸近対数モーメント母関数

本節では fBt の漸近対数モーメント母関数を求めてみよう。(34) から

$$E[e^{\theta A_t}] = E[\exp\{\theta(mt + \sqrt{am}Z(t))\}] = e^{m\theta t}\left\{E[e^{\theta Z(t)}]\right\}^{\sqrt{am}}.$$

ここで

$$E[e^{\theta Z(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^H} e^{-\frac{x^2}{2t^{2H}}}\, dx = \exp\left\{\frac{t^{2H}\theta^2}{2}\right\},$$

より

$$E[e^{\theta A_t}] = \exp\left\{m\theta t + \frac{\sqrt{am}}{2} t^{2H}\theta^2\right\}.$$

これより $1/2 < H < 1$ における漸近対数モーメント母関数は次式のようになる。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E[e^{\theta A_t}] = m\theta + \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{am}}{2} t^{2H-1}\theta^2 = \infty. \tag{44}$$

従って fBt では [12] や [16] で定式化されている大偏差理論の枠組で待ち行列長の裾野分布を求めることができない。

6.2　Duffield-O'Connell のスケーリング手法

[3] は大偏差理論を用いた待ち行列長の裾野分布の近似手法を大幅に拡張し、長期依存性や自己相似性を有する到着過程に対しても適用できる上限式および下限式を導出した。以下では [3] で述べられている主要定理および fBt に適用可能な系を列挙する。証明は [3] を参照されたい。

時刻 $t \in T$[12]におけるシステム内仕事量過程 W_tとし、時刻 t における待ち行列長を次式で定義する。

$$Q = \sup_{t\geq 0} W_t. \tag{45}$$

[12] $T = Z_+$ (非負の整数・離散時間を表す) または R_+ (非負の実数・連続時間を表す)。

仮定 **6.1**　*1.* 任意の $\theta \in R$ に対し、

$$\lambda(\theta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} \log E[e^{\theta v_t W_t/a_t}], \tag{46}$$

が存在し、かつ無限大に発散する関数 $a, v : T \to T$が存在する。さらに$\lambda(\cdot)$ は滑らかでかつ下半連続[13]である。

2. $\lambda(\theta) < 0$ となる $\theta > 0$ が存在する。

3.

$$a^{-1}(x) = \sup\{s \in T : a(s) \le x\}, \tag{47}$$

とするとき、任意の $c > 0$ に対し、極限

$$g(c) = \lim_{t\to\infty} \frac{v(a^{-1}(t/c))}{h_t}, \tag{48}$$

が存在するような増加関数 $h : T \to T$が存在する。

仮定 6.1 の 1 は $(W_t/a_t, v_t)$ が大偏差原理を満足することを保証する。つまり、$\lambda(\theta)$ の Legendre 変換

$$\lambda^*(x) = \sup_{\theta\in R}\{\theta x - \lambda(\theta)\}, \tag{49}$$

を定義すると任意のボレル集合 Γ に対し、以下の上下限式が成立する[14]。

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} \log \Pr\{W_t/a_t \in \Gamma\} \quad \le \quad - \inf_{x\in\bar{\Gamma}} \lambda^*(x), \tag{50}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} \log \Pr\{W_t/a_t \in \Gamma\} \quad \ge \quad - \inf_{x\in\Gamma^o} \lambda^*(x). \tag{51}$$

また $x > 0$ に対し (50) および (51) より

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} \log \Pr\{W_t/a_t > x\} \quad \le \quad -\lambda^*(x), \tag{52}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} \log \Pr\{W_t/a_t > x\} \quad \ge \quad -\lambda^*(x^+). \tag{53}$$

定理 **6.2** もし仮定 *6.1*が成立するならば、次式の下限式が成立する。

$$\liminf_{b\to\infty} \frac{1}{h_b} \log \Pr\{Q > b\} \ge - \inf_{c>0} g(c)\lambda^*(c^+). \tag{54}$$

証明　　[3] を参照。

仮定 **6.3** 以下を満足する $d > 0$ が存在する。

1.

$$\inf_{c>0} g(c)\lambda^*(c) = \inf_{c>d} g(c)\lambda^*(c) < \infty; \tag{55}$$

2.

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{c>d} \frac{\lambda^*(c)v_t}{h(ca_t)} = \inf_{c>d} \lambda^*(c)g(c); \tag{56}$$

[13] essentially smooth and lower semi-continuous

[14] $\bar{\Gamma}$ は Γの閉包、Γ^o は Γの開核を表す。

3. 任意の $\gamma > 0$ に対し、

$$\limsup_{b\to\infty} \frac{1}{h_b} \log \sum_{k=[a^{-1}(b/d)]}^{\infty} e^{-\gamma v_k} \leq -\inf_{c>0} g(c)\lambda^*(c); \tag{57}$$

4.

$$\limsup_{b\to\infty} \frac{1}{h_b} \log a^{-1}(b/d) = 0. \tag{58}$$

仮定 **6.4** ($T = R_+$の場合のみ)
すべての $\theta > 0$ に対し、

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} \log E[e^{\theta v_n (W_n^* - W_n)/a_n}] = 0. \tag{59}$$

またはある $\theta > 0$ に対して *(59)* が成立し、かつすべての $x > 0$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} \log \Pr\{W_n^* - W_n > x a_n\} \leq -\lambda^*(x). \tag{60}$$

定理 **6.5** 仮定 *6.1*および *6.3*が成立し、もし $T = R_+$ ならばさらに仮定 *6.4*も成立すると仮定する。このとき以下の上限式を得る。

$$\limsup_{b\to\infty} \frac{1}{h_b} \log \Pr\{Q > b\} \leq -\inf_{c\geq 0} g(c)\lambda^*(c). \tag{61}$$

証明　　[3] を参照。

系 **6.6** 仮定 *6.1*が成立し、もし $T = R_+$ ならばさらに仮定 *6.4*も成立すると仮定する。このときある $a, v > 0$ に対し、$a_t = t^a$ かつ $v_t = t^v$ ならば

$$\limsup_{b\to\infty} \frac{1}{b^{v/a}} \log \Pr\{Q > b\} \leq -\inf_{c>0} \frac{1}{c^{v/a}} \lambda^*(c). \tag{62}$$

もしλ^* が連続ならば定理 *6.2*より

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{v/a}} \log \Pr\{Q > b\} = -\inf_{c>0} \frac{1}{c^{v/a}} \lambda^*(c). \tag{63}$$

証明　　[3] を参照。

6.3　スケーリング手法による fBt 入力待ち行列の裾野分布近似

今再び fBt 入力の待ち行列システムを考えよう。仕事量過程は次式で表される。

$$W_t = A_t - \mu t = (m - \mu)t + \sqrt{am} Z_t. \tag{64}$$

スケーリング関数を $a_t = t$、$v_t = t^{2-2H}$とおく。このとき

$$\lambda(\theta) = (m - \mu)\theta + \frac{am}{2}\theta^2, \tag{65}$$

となる。このとき系 6.6の仮定はすべて満足され、系 6.6の結果が適用できる [3]。最終的に次の結果を得る。

$$\lim_{b\to\infty} b^{2H-2} \log \Pr\{Q > b\} = -\frac{(\mu - m)^{2H}}{2amH^{2H}(1 - H)^{2-2H}}. \tag{66}$$

これは仮想待ち時間の裾野分布の下限 (39) とほぼ一致している。つまり (39) はかなりタイトな近似式であることがわかる。

終りに

本稿ではフラクタル的トラフィック特性として長期依存性および自己相似性についてその定義・性質を概観し、代表的な到着過程についてそれらの性質の有無を調べた。また fBt については待ち行列長の近似解析を紹介し、それが良好な精度であること示す大偏差理論的アプローチも紹介した。

フラクタル的トラフィック特性を考慮に入れてシステムの性能評価を行うとき、どれだけのタイムスケールでその特性を考えなければならないかが鍵になると思われる。すべての通信アプリケーションは有限時間以内に必ず終了するため、非常に長い時間 (例えば 1 週間や 1 年単位) の相関性は無意味と思われる。待ち行列理論で解析可能な到着過程クラスは短期依存的であるが、タイムスケールの有効範囲を定めることにより、その範囲内で長期依存的性質をある程度近似できると考えられる。現在この方向に沿って研究を進めている段階である [13]。

A (30) の導出

本節では (30) の導出を行なう。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}A(t_1,t_2),A(t_3,t_4) &= \mathrm{Cov}A_{t_2}-A_{t_1},A_{t_4}-A_{t_3} \\
&= E[\{A_{t_2}-A_{t_1}-\lambda(t_2-t_1)\}\{A_{t_4}-A_{t_3}-\lambda(t_4-t_3)\}] \\
&= E[A_{t_2}A_{t_4}-A_{t_2}A_{t_3}-A_{t_1}A_{t_4}+A_{t_1}A_{t_3}]-\lambda^2(t_2-t_1)(t_4-t_3). \quad (67)
\end{aligned}$$

ここで $s<t$ に対して

$$\begin{aligned}
E[A_sA_t] &= E[A_s(A_t-A_s)+A_s^2] \\
&= E[A_s(A_t-A_s)]+E[A_s^2].
\end{aligned}$$

今、$J(t)\in\{1,\cdots,M\}$ を時刻 t における到着過程の状態とし、

$$P_{ij}(n,t)=\mathrm{Prob}\{A_t=n,\ J_t=j\mid A_0=0,\ J_0=i\},\qquad 1\le i,j\le M.$$

とおく。$P_{ij}(n,t)$ を ij成分に持つ行列を $P(n,t)$ とおくと、その母関数 $P(z,t)$ は次のようになる。

$$P(z,t)=e^{(C+zD)t}.$$

時刻 0 における到着過程の状態は確率 πに従うと仮定すると

$$\begin{aligned}
E[A_s(A_t-A_s)] &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}ij\mathrm{Prob}\{A_s=i,\ A_t-A_s=j) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}ij\boldsymbol{\pi}P(i,s)P(j,t-s)\boldsymbol{e} \\
&= \boldsymbol{\pi}\left(\sum_{i=0}^{\infty}iP(i,s)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}jP(j,t-s)\right)\boldsymbol{e} \\
&= \boldsymbol{\pi}\left(\frac{d}{dz}P(z,s)\right)_{z=1}\left(\frac{d}{dz}P(z,t-s)\right)_{z=1}\boldsymbol{e} \\
&= \boldsymbol{\pi}D\left(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}s-e^{Qs}+I\right)(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}-Q)^{-2}\left\{\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}(t-s)-e^{Q(t-s)}+I\right\}D\boldsymbol{e} \\
&= \lambda^2s(t-s)+\boldsymbol{\pi}D\left(I-e^{Qs}\right)\left\{I-e^{Q(t-s)}\right\}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}-Q)^{-2}D\boldsymbol{e}.
\end{aligned}$$

ここで $Q = C + D$ である。また

$$\begin{aligned} E[A_s^2] &= \boldsymbol{\pi}\left(\frac{d^2}{dz^2}P(z,s)\right)_{z=1}\boldsymbol{e} + E[A_s] \\ &= 2\boldsymbol{\pi}D\left(\frac{t^2}{2}\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi} + e^{Qt} - Qt - I\right)(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi} - Q)^{-2}D\boldsymbol{e} + \lambda t \\ &= \lambda^2 t^2 + \lambda t + 2\boldsymbol{\pi}D\left(e^{Qt} - Qt - I\right)(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi} - Q)^{-2}D\boldsymbol{e}. \end{aligned}$$

よって

$$E[A_s A_t] = \lambda^2 st + \lambda s + \boldsymbol{\pi}D\left\{e^{Qs} + e^{Qt} - e^{Q(t-s)} - 2Qs - I\right\}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi} - Q)^{-2}D\boldsymbol{e}.$$

これを (67) に用いることにより (30) を得る。

(29) については (30) と同様に導出できるので省略する。

B (32) の導出

$r(k) = \mathrm{Cov}X_t, X_{t+k}/\mathrm{Var}X_t$ で $\lim_{t\to\infty}\mathrm{Var}X_t = \lambda/\mu$ より、

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Cov}X_t, X_{t+k} = \lambda\int_k^\infty\{1 - F(x)\}dx, \tag{68}$$

を示す。

$$\mathrm{Cov}X_t, X_{t+k} = E[X_t X_{t+k}] - E[X_t]E[X_{t+h}]. \tag{69}$$

まず時刻 t で $M/G/\infty$ システムの客数 X_t が k である確率は次式で表される。

$$\mathrm{Prob}\{X_t = k\} = \frac{\{\lambda t p(t)\}^k}{k!}e^{-\lambda t p(t)},$$

ここで $p(t)$ は t までに到着したある客が t でまだシステム内に滞在している確率を表し、

$$p(t) = \frac{1}{t}\int_0^t\{1 - F(t-u)\}du = \frac{1}{t}\int_0^t\{1 - F(x)\}dx.$$

である。従って

$$E[X_t] = \lambda t p(t) = \lambda\int_0^t\{1 - F(x)\}dx. \tag{70}$$

次に結合確率 $\mathrm{Prob}\{X_t = i, X_{t+k} = j\}$ を考える。時刻 t までに到着した総客数を m、そのうち時刻 $t+k$ で滞在している客数を k とおく。この場合 $\{X_t = i, X_{t+k} = j\}$ は以下のように起きる。

1. 時刻 t までに $m - i$ 人の客が離脱する。
2. t から $t+k$ までの間に $i - k$人離脱する。
3. t から $t+k$ までの間に新たに n 人到着すると仮定する。この中で $j - k$ 人は時刻 $t+k$ でも滞在し、$n - j + k$ 人は離脱する。

これより次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\{X_t = i, X_{t+k} = j\} &= \sum_{m=i}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{i} \frac{m!}{(m-i)!(i-k)!k!} \{p_1(t)\}^{m-i} \{p_2(t)\}^{i-k} \{p_3(t)\}^k \\ &\quad \times \sum_{n=j-k}^{\infty} \frac{(\lambda k)^n}{n!} e^{-\lambda k} \left(\begin{array}{c} n \\ j-k \end{array} \right) \{p(k)\}^{j-k} \{1-p(k)\}^{n-j+k}, \qquad (71)\end{aligned}$$

ここで $p_1(t)$ は時刻 t までに到着した客が t までに離脱する確率、$p_2(t)$ は t までに到着した客が t から $t+k$ の間に離脱する確率、$p_3(t)$ は $t+k$ まで離脱しない確率であり、それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned}p_1(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t F(x)dx, \\ p_2(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \{F(x+h) - F(x)\}dx, \\ p_3(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \{1 - F(x+h)\}dx.\end{aligned}$$

(71) の結合母関数は

$$\begin{aligned}P(z_1, z_2) &= \sum_{z_1=0}^{\infty} \sum_{z_2=0}^{\infty} \mathrm{Prob}\{X_t = i, X_{t+k} = j\} \\ &= \exp\{\lambda t p_3(t) z_1 z_2 + \lambda t p_2(t) z_1 + \lambda k p(k) z_2 + \lambda t (p_1(t) - 1) - \lambda k p(k)\},\end{aligned}$$

となる。これを z_1 と z_2 で偏微分し、$z_1 = z_2 = 1$ を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}E[X_t X_{t+k}] &= \lambda \int_0^t \{1 - F(x+k)\}dx \cdot \lambda \int_0^t \{1 - F(x)\}dx \\ &\quad + \lambda \int_0^k \{1 - F(x)\}dx \cdot \lambda \int_0^t \{1 - F(x)\}dx \\ &\quad + \lambda \int_0^t \{1 - F(x+k)\}dx. \qquad (72)\end{aligned}$$

(70)、(72) より

$$\mathrm{Cov} X_t, X_{t+k} = \lambda \int_k^{t+k} \{1 - F(x)\}dx, \qquad (73)$$

となる。ここで $t \to \infty$ より (68) を得る。

C　大きい裾野を持つ確率分布

ここでは到着時間間隔の確率分布関数で、裾野の分布が大きいものを紹介する [10, 19]。

- パレート分布 (Pareto distribution)

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha}, \qquad a, \alpha \geq 0, x \geq a.$$

ここで$\alpha \leq 2$ のとき分散は無限大となり、$\alpha \leq 1$ のとき平均も無限大になる。

- 2 重指数分布

$$F(x) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right\}.$$

- 対数正規分布 (log normal distribution)

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \log y} \exp\left\{-\frac{(\log y - \zeta)^2}{2\sigma^2}\right\} dy.$$

- 対数 2 重指数分布

$$F(x) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{\log x - \alpha}{\beta}\right)\right\}.$$

References

[1] D. R. Cox. Long-Range Dependence: A Review. In *Statistics: An Appraisal, Proccedings 50th Anniversary Conference*, pages 55–74. Iowa State Statistical Laboratory, The Iowa State University Press, 1984.

[2] D. M. Lucantoni, K. Meier-Hellstern and M. F. Neuts. A Single Server Queue with Server Vacations and a Class of Non-renewal Arrival Processes. *Advances in Applied Probability*, 22:676–705, 1990.

[3] N. G. Duffield and N. O'Connell. Large Deviations and Overflow Probabilities for the General Single-server Queue, with Applications. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 118:363–374, 1995.

[4] U. Mocci J. Roberts and J. Virtamo, editors. *Broadband Network Teletraffic*. Springer, 1996.

[5] K. R. Krishnan. A New Class of Performance Results for a Fractinal Brownian Traffic Model. *Queueing Systems*, 22:277–285, 1996.

[6] B. B. Mandelbrot and J. W. V. Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Rev.*, 10:422–437, 1968.

[7] A. Erramilli, O. Narayan and W. Willinger. Fractal Queueing Models. In J.H. Dshalalow, editor, *Frontiers in Queueing*, chapter 9, pages 245–247. CRC Press, 1997.

[8] I. Norros. A Storage Model with Self-similar Input. *Queueing Systems*, 16:387–396, 1994.

[9] I. Norros. On the Use of Fractional Brownian Motion in the Theory of Connectionless Networks. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 13(6):953–962, Aug. 1995.

[10] V. Paxson and S. Floyd. Wide Area Traffic: The Failure of Poisson Modeling. *IEEE/ACM Trans. Networking*, 3(3):226–244, Jun. 1995.

[11] S. Robert and J. L. Boudec. New Models for Pseudo Self-Similar Traffic. *Performance Evaluation*, 30:57–68, 1997.

[12] A. Shwartz and A. Weiss. *Large Deviations for Performance Analysis*. Stochastic Modeling Series. New York Chapman Hall, 1995.

[13] T. Yoshihara, S. Kasahara and Y. Takahashi. Practical Time-scale Fitting of Self-similar Traffic with Markov-modulated Poisson Process. In *6th International Conference on Telecommunication Systems: Modelling and Analysis*, pages 231–235, Nashville, TN, USA, March 5-8 1998.

[14] B. Tsybakov and N.D. Georganas. On Self-Similar Traffic in ATM Queues: Definitions, Overflow Probability Bound, and Cell Delay Distribution. *IEEE/ACM Trans. Networking*, 5(3):397–409, Jun. 1997.

[15] W. Willinger W. E. Leland, M. S. Taqqu and D. V. Wilson. On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic (Extended Version). *IEEE/ACM Trans. Networking*, 2(1):1–15, Feb. 1994.

[16] A. Weiss. An Introduction to Large Deviations for Communication Networks. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 13(6):938–952, 1995.

[17] 小倉久直. 物理・工学のための確率過程論. コロナ社, 1978.

[18] 滝根哲哉. M/G/1 パラダイムと MAP/G/1 待ち行列. Vision21, 1994.

[19] 名部正彦、馬場健一、村田正幸、宮原秀夫. インターネット・アクセスネットワーク設計のための WWW トラヒックの分析とモデル化. 信学論 *(B-I)*, J80-B-I(6):428–437, Jun. 1997.