巡回セールスマン問題に対する λ-opt の確率的多項式性

April, 1998

岡田 正浩[1]　　田地 宏一[2]　　高橋 豊[1]

和文概要　　本論文では, 対称な巡回セールスマン問題に対する局所探索法の一種である λ-opt の確率的な多項式性を証明する. λ-opt は経験的には多項式程度の反復回数で終了することが知られているが, 初期解, 各反復で入れ換える枝の選択によっては λ-opt が指数回数の反復を要する問題例が存在することもわかっている. その一方で, 反復回数の上限が確率的に多項式であるという結果が得られている. 例えば, L_1 ノルムで定義されている問題においては, 節点数 n の問題に対し, 次元に関係なく 2-opt の反復回数の期待値が $O(n^6 \log n)$ であることが示されている. また, ユークリッド距離で定義される 2 次元の問題においては, 2-opt の反復回数の期待値が $O(n^{10} \log n)$ であり, また $1 - 1/n$ 以上の確率で反復回数の上限が $O(n^{16})$ であることが知られている. 本論文では, L_1 ノルムで定義されている問題に対する λ-opt の反復回数の期待値が多項式であること, および $1 - 1/n$ 以上の確率で反復回数の上限が多項式であることを証明する. また, 3 次元以上のユークリッド距離で定義される問題に対して反復回数の期待値は多項式であること, および $1 - 1/n$ 以上の確率で反復回数の上限が多項式であることを証明する. さらに, 2 次元の場合についても反復回数の上限が $1 - 1/n$ 以上の確率で $O(n^{10})$ であることを証明する. これは, これまで知られていた結果より低い次数となっている.

[1]奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
[2]大阪大学大学院基礎工学研究科

1 はじめに

組合せ最適化の有名な問題の一つに, 巡回セールスマン問題 (TSP) がある. これは, 枝に長さの付いた完全グラフが与えられたときに, その長さの和が最小となるハミルトン閉路 (以下, 巡回路と呼ぶ) を求める問題である. TSP は NP-困難であることが証明されており [8], 厳密解を多項式時間で求める方法は見つかっていない. そこで, 古くから局所探索法等の多くのヒューリスティックス (発見的手法) が提案されており, 最適解ではないが, ある程度良い近似解が比較的短い時間で求められている [3, 6, 7, 9].

本論文では λ-opt について考える. λ-opt は, 2-opt を一般化した局所探索法であり, おもに対称な TSP にもちいられる [3, 6]. 巡回路 τ が与えられたとき, τ に含まれる λ 本の枝を入れ換えることにより構成される巡回路の集合を $\mathcal{C}(\tau)$ とする. この $\mathcal{C}(\tau)$ のことを巡回路 τ に対する λ-opt 近傍と呼ぶ. λ-opt の一度の反復では $\mathcal{C}(\tau)$ のなかから現在の巡回路 τ より短い巡回路 τ' を一つ選び, これを次の反復での巡回路とする. この手順を繰り返し, $\mathcal{C}(\tau)$ のなかに現在の巡回路 τ より短い巡回路が見つからなくなるまで反復を繰り返す. また反復が終了したときの巡回路 τ を λ-opt 近傍に対する局所最適解と呼ぶ. 2-opt, 3-opt は経験的には, 多項式程度の反復回数で終了することが計算機実験などから知られている [4, 9]. しかし, その一方で, λ-opt が初期解, 各反復での入れ換える枝の選択によっては指数回数の反復を要する問題例が存在することもわかっている [1, 4]. また, とくに 2-opt に対しては, 確率的な議論により以下のようなことが示されている.

定理 1.1 [1, 2] d 次元単位超立方体に n 個の節点が一様に分布し, 節点間の距離が L_1 ノルムで定義されている問題において, 2-opt の反復回数の期待値は $O(n^6 \log n)$ である. □

定理 1.2 [5] 2 次元単位平面上に n 個の節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義される問題において, 2-opt が $O(n^{16})$ 以上の反復回数を要するのは高々 $\frac{c}{n}$ の確率である. ここで c は n と無関係の正の定数. □

定理 1.3 [1, 2] 2 次元単位平面上に n 個の節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義されている問題において, 2-opt の反復回数の期待値は $O(n^{10} \log n)$ である. □

本論文ではこれらの拡張を行なう. まず, 枝の長さが枝ごとに独立に決められるグラフに対する TSP に対して, λ-opt の反復回数は確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で, $O(n^{2\lambda+2})$ 以下であり, 期待値は $O(n^{2\lambda+2} \log n)$ 以下となることを示す. 次に, 節点間の距離が L_1 ノルムで与えられる問題に対して, λ-opt の反復回数の期待値が $O(n^{2\lambda+2} \log n)$ となり, また確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で, λ-opt の反復回数の上限は $O(n^{2\lambda+2})$ となることを示す. 次に, 2 次元のランダムユークリッド TSP(単位平面上に節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で与えられる TSP) に対して, 2-opt の反復回数は, $1 - \frac{1}{n}$ 以上の確率で $O(n^{10})$ 以下となり, 反復回数の期待値は $O(n^{10} \log n)$ となることを証明する. さらに, 3 次元以上のランダムユークリッド TSP では, 2-opt の反復回数は, 確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で, $O(n^{5.5})$ となり, 期待値は $O(n^6 \log n)$ となることを証明する.

ここで, 本論文でもちいる記号をいくつか定義しておく. $P\{A\}$ は事象 A の起こる確率をあらわす. $\lceil x \rceil$ は x を下まわらない最小の整数, $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数をそれぞれあらわす. $|\cdot|$ は文脈に応じて測度または集合の要素数をあらわすとする. c_d は d 次元単位球の体積をあらわす. $\{x_1, x_2\}$ と書いて, 節点 x_1, x_2 間の枝をあらわす. log は底が 2 の対数, ln は自然対数をあらわす.

2 λ-opt とその反復回数

本論文では, 対称な TSP だけを考えることにし, 節点数 $|V| = n$, 枝数 $|E| = m = \frac{n(n-1)}{2}$ である無向完全グラフ $G = (V, E)$ 上での TSP を考える. ただし, それぞれの枝の長さは適当な確率分布にしたがって定められるものとする. それぞれの枝 $e \in E$ に対し, 確率分布に従って定められた枝の長さを $l(e)$ とあらわし, 枝の長さを確率変数として見る場合には $L(e)$ とあらわす. このグラフ上で λ-opt を行う. 以下では, それぞれの反復において巡回路の長さが短くなるような枝の入れ換えだけを許し, 巡回路の長さが変化しないような枝の入れ換えは行なわないものとする. まず, 以下の仮定をおく.

仮定 **2.1** グラフの中のすべての枝 $e \in E$ に対し, 長さの確率変数 $L(e)$ は有界な値をとる. すなわち,

$$P\{L_{min} \leq L(e) \leq L_{max}\} \quad = \quad 1$$

をみたすような定数 L_{min}, L_{max} が存在するものとする. □

本論文では, この仮定がみたされる問題のみを扱うものとする. 巡回路は n 本の枝から構成されるので, 上の仮定の下では, 巡回路の長さは nL_{min} と nL_{max} のあいだとなる. λ-opt のそれぞれの反復で少なくとも δ の長さが短くなるならば, 反復回数は

$$\frac{nL}{\delta} \tag{1}$$

以下となる. ここで,

$$L \quad = \quad L_{max} - L_{min}$$

である. したがって, δ の下限値が求まれば, 反復回数の上限値が求まることになる. λ-opt のそれぞれの反復で短くなる長さは, その反復において巡回路から取り除かれる λ 本の枝の長さの合計と巡回路を再構成するために使われる λ 本の枝の長さの合計との差である. それぞれの反復で短くなる長さを求めるには, この合計 2λ 本の枝だけを考えればよい. それでは節点数 n が与えられたとき, グラフの中に λ-opt の反復で入れ換えに使われる可能性のある 2λ 本の枝の組の組合せの数はどれくらいあるであろうか? λ-opt の反復で入れ換えに使われる可能性のあるすべての 2λ 本の枝の組の集合を $\Pi_{n,\lambda}$ とし, その要素を $(\pi, \pi') \in \Pi_{n,\lambda}$ と書く. ここで, π は巡回路から取り除かれる λ 本の枝の集合, π' は巡回路を再構成するために使われる λ 本の枝の集合をあらわすことにする. ただし, $\Pi_{n,\lambda}$ には, π に含まれる枝の長さの合計より π' に含まれる枝の長さの合計のほうが長いようなものも含むことにする. したがって, $(\pi, \pi') \in \Pi_{n,\lambda}$ ならば, $(\pi', \pi) \in \Pi_{n,\lambda}$ となることに注意する. 例として, 2-opt の場合を図 1 に示す. 左の巡回路では枝 e_1, e_2 を取り除き枝 e_3, e_4 を付け加えることにより巡回路が再構成される. しかし, 右の巡回路では e_1, e_2 を取り除き e_5, e_6 を付け加えることで巡回路が再構成される. この図のグラフの場合, $(\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\})$ も $(\{e_1, e_2\}, \{e_5, e_6\})$ も 2-opt の反復で使われる可能性があるので $\Pi_{n,\lambda}$ の要素である. このように, π を一つ決めても $(\pi, \pi') \in \Pi_{n,\lambda}$ となる π' は必ずしも一通りではない. $\Pi_{n,\lambda}$ の要素数について以下の補題が成り立つ.

補題 **2.1** 節点数 n の無向完全グラフにおいて λ-opt を行うとき,

$$|\Pi_{n,\lambda}| \leq n^{2\lambda} \tag{2}$$

となる.

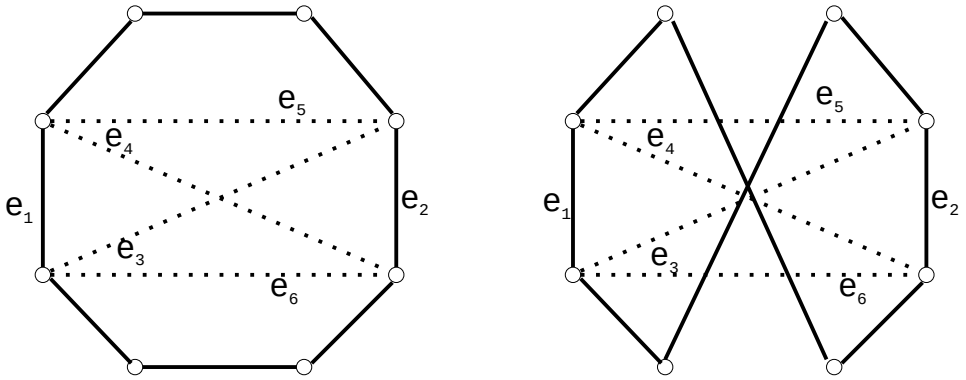

図 1: π と π' の関係

証明. まず, グラフの枝の総数は m であるから, そのなかから λ 本の枝をとる組合わせの数は $\left(\begin{array}{c} m \\ \lambda \end{array} \right)$ 通りある. λ 本の枝の集合 π を定めたとき, その π に対して $(\pi, \pi') \in \Pi_{n,\lambda}$ となる π' は何通りあるであろうか? 重複している場合には, 重複している数だけ数え上げることにして, π のすべての枝の端点の集合を $V(\pi)$ と書くことにすれば, 巡回路から π の枝を取り除いたとき, π' を使って巡回路を再構成できることから $V(\pi) = V(\pi')$ でなければならない. したがって, 枝の集合 π' の取り得る組合せの数は, $2\lambda = |V(\pi)|$ 個の節点を 2 個ずつ λ 個の集合に分ける組合せの数 $\frac{(2\lambda)!}{2^\lambda \lambda!}$ より少ない. ゆえに

$$
\begin{aligned}
|\Pi_{n,\lambda}| &\leq \left(\begin{array}{c} m \\ \lambda \end{array} \right) \frac{(2\lambda)!}{2^\lambda \lambda!} \\
&= \frac{m!}{\lambda!(m-\lambda)!} \frac{(2\lambda)!}{2^\lambda \lambda!} \\
&= \frac{m!}{(m-\lambda)!} 2^\lambda \frac{(2\lambda)!}{(2^\lambda \lambda!)^2} \\
&\leq \frac{m!}{(m-\lambda)!} 2^\lambda \\
&\leq m^\lambda 2^\lambda \\
&= \{n(n-1)\}^\lambda \\
&\leq n^{2\lambda}
\end{aligned}
$$

となる. □

λ-opt のある反復において, 枝集合 π_k を 枝集合 π'_k に入れ換えると巡回路の長さは $\sum_{e \in \pi_k} l(e) - \sum_{e \in \pi'_k} l(e)$ だけ変化する. したがって, λ-opt のある反復において π_k を π'_k に入れ換えるとき巡回路が短くなる長さを確率変数 $Z_{\lambda,k}$ であらわすと,

$$
Z_{\lambda,k} = \sum_{e \in \pi_k} L(e) - \sum_{e \in \pi'_k} L(e)
$$

となる. このとき, この入れ換えによって巡回路が長くなる場合は負になるが, 長くなるような組合せは実際の λ-opt において入れ換えられることはない.

式 (1) において, δ が大きいほど反復回数は小さくなる. そこで, λ-opt の一回の反復で巡回路がどの程度短くなるかを考えることにする. 確率変数 $Z_{\lambda,k}$ に対して, 確率変数 Z を

$$Z \quad = \quad \min_k \{Z_{\lambda,k} | Z_{\lambda,k} > 0\}$$

とおく. このとき, 例えば $0 < Z \leq \delta$ となる確率が $\frac{1}{n}$ より小さくなれば, (1) より λ-opt の反復回数は確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で, 高々 $\frac{nL}{\delta}$ 回となることがわかる.

ここまでの議論では λ-opt の一度の反復を考えてきたが, [1, 2] で示されているように, 連続する 2 回の反復を考えることにより, λ-opt の反復回数の多項式の次数を下げることができる場合がある. まず, 次のような集合を考える.

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}_{n,\lambda} \quad = \quad & \{(\pi_{k1}, \pi'_{k1}, \pi_{k2}, \pi'_{k2}) | (\pi_{k1}, \pi'_{k1}) \in \Pi_{n,\lambda}, (\pi_{k2}, \pi'_{k2}) \in \Pi_{n,\lambda}, \\ & (\pi_{k1}, \pi'_{k1}), (\pi_{k2}, \pi'_{k2}) \text{ は連続する反復となりうる } \}. \end{aligned}$$

“連続する反復となりうる” というのは, λ-opt の反復において, まずある巡回路から π_{k1} という枝集合を取り去り π'_{k1} を付け加えた後, π_{k2} をとり π'_{k2} を付け加えるという操作が可能であるということをあらわしている. 例えば, $(\pi_{k1}, \pi'_{k1}), (\pi_{k1}, \pi'_{k1})$ や $(\pi_{k1}, \pi'_{k1}), (\pi'_{k1}, \pi_{k1})$ などは連続する反復とはなりえない.

ここで, 確率変数 $Z^{(2)}$ を

$$Z^{(2)} \quad = \quad \min_{\Pi^{(2)}_{n,\lambda}} \{\max\{Z_{\lambda,k1}, Z_{\lambda,k2}\} | Z_{\lambda,k1} > 0, Z_{\lambda,k2} > 0\}$$

とおく. このとき, 例えば $0 < Z^{(2)} \leq \delta$ となる確率が $\frac{1}{n}$ より小さくなれば, λ-opt の反復回数は確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で, 高々 $\frac{2nL}{\delta}$ 回となることがわかる. あきらかに,

$$|\Pi^{(2)}_{n,\lambda}| \quad \leq \quad |\Pi_{n,\lambda}|^2 \leq n^{4\lambda} \tag{3}$$

が成り立つ.

以下では, これらの事実を使い, 具体的な問題のクラスにおいて確率的多項式性を証明する.

3 具体的な問題例に対する多項式性の証明

この節では, ランダム TSP(枝の長さが枝ごとに独立に決められるグラフに対する TSP) と, 節点間の距離が L_1 ノルムで定義された問題に対する λ-opt が確率的多項式性をもつことを証明する.

3.1 ランダム TSP

まず, ランダム TSP を考える. ランダム TSP とは, 枝の長さが枝ごとに独立に決められるグラフに対する TSP のことである. この問題のクラスに対しては以下の定理が成り立つ.

定理 3.1 各枝 e の長さ $L(e)$ が, 枝ごとに独立で同一の分布に従うと仮定する. さらに, $L(e)$ は確率密度関数 $g(t)$ によって与えられるものとする. 仮定 2.1 がみたされており, ある定数 U によってすべての t に対し,

$$g(t) \quad \leq \quad U$$

となっているものとすると, この問題の群では, 確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で λ-opt の反復回数は高々 $LUn^{2\lambda+2}$ である. また, 反復回数の期待値は $2LUn^{2\lambda+2} \log n$ 以下となる.

証明. $(\pi_k, \pi'_k) \in \Pi_{n,\lambda}$ に対して, $e_1 \in \pi_k, e_1 \notin \pi'_k$ となる枝 e_1 をひとつ選び,

$$\overline{L}(e_1) = \sum_{e \in \{\pi_k - \{e_1\}\}} L(e) - \sum_{e \in \pi'_k} L(e)$$

という確率変数を考える. すると

$$P\{0 < Z_{\lambda,k} \leq t\} = P\{0 < L(e_1) + \overline{L}(e_1) \leq t\}$$

である. ここで, 確率変数 $L(e_1)$ もまた密度関数 $g(t)$ に従い, かつ $\overline{L}(e_1)$ とは独立であることから,

$$\begin{aligned} P\{0 < L(e_1) + \overline{L}(e_1) \leq t\} &\leq P\{0 < L(e_1) \leq t\} \\ &\leq Ut \end{aligned}$$

となる. $Z = \min_k\{Z_{\lambda,k} | Z_{\lambda,k} > 0\}$ とすると, 任意の $\delta > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} P\{Z \leq \delta\} &= P\{\min_k\{Z_{\lambda,k} | Z_{\lambda,k} > 0\} \leq \delta\} \\ &\leq \sum_k P\{0 < Z_{\lambda,k} \leq \delta\} \\ &\leq \sum_k U\delta \\ &= |\Pi_{n,\lambda}| U\delta \\ &\leq n^{2\lambda} U\delta \end{aligned}$$

となる. すなわち, 確率 $1 - n^{2\lambda}U\delta$ 以上で反復回数は, $\frac{nL}{\delta}$ 以下となる. したがって $\delta = (Un^{2\lambda+1})^{-1}$ とおくと, 確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で反復回数は高々$LUn^{2\lambda+2}$ である.

λ-opt を行なった場合に必要な反復回数の上限を確率変数 T であらわすとすると, T は最大でも $n!$ を越えることはない. したがって,

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{i=1}^{n!} iP\{T = i\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \leq T \leq 2^j\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \leq T\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \leq \frac{nL}{Z}\} \\ &= \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{Z \leq \frac{nL}{2^{j-1}}\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j n^{2\lambda} U \frac{nL}{2^{j-1}} \\ &\leq 2n^{2\lambda+1} UL(\log n! + 1) \\ &\leq 2n^{2\lambda+1} ULn \log n \\ &= 2ULn^{2\lambda+2} \log n \end{aligned}$$

となり, T の期待値は $2LUn^{2\lambda+2} \log n$ 以下となる. □

3.2 節点間の距離が L_1 ノルムで定義された問題

節点が d 次元単位超立方体に一様に独立に分布し, 枝の長さは節点間の L_1 ノルムで定義される問題を考える.

定理 3.2 d 次元単位超立方体に節点が一様に分布し, 節点間の距離が L_1 ノルムで定義される問題においては, λ-opt の反復回数は確率 $1-\frac{1}{n}$ 以上で高々 $\frac{d}{2}n^{2\lambda+2}$ である. また, 反復回数の期待値は $dn^{2\lambda+2}\log n$ 以下である.

証明. グラフ上の枝 e に対して, その 2 つの端点を $x^e=(x_1^e,x_2^e,\cdots,x_d^e)$, $y^e=(y_1^e,y_2^e,\cdots,y_d^e)$ とする. ここで, λ-opt の一回の反復において巡回路から枝集合 π_k に含まれる枝が取り除かれ, 枝集合 π_k' に含まれる枝が付け加えられるとする. 節点間の距離が L_1 ノルムで定義される TSP で巡回路から π_k に含まれる枝を取り除き π_k' に含まれる枝を付け加えると巡回路の長さは

$$z_{\lambda,k} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{e\in\pi_k}|x_j^e-y_j^e| - \sum_{j=1}^{d}\sum_{e\in\pi_k'}|x_j^e-y_j^e| \tag{4}$$

だけ短くなる. それぞれの j, e に対して, $\{(x_j^e,y_j^e)\in R^2|0\le x_j^e\le 1, 0\le y_j^e\le 1\}$ という領域を

$$\begin{aligned} H_{e,j} &= \{(x_j^e,y_j^e)\in R^2|x_j^e\ge y_j^e\},\\ \overline{H}_{e,j} &= \{(x_j^e,y_j^e)\in R^2|x_j^e< y_j^e\}\end{aligned}$$

と分割する. さらに,

$$\prod_{1\le j\le d, e\in\pi_k}\{(x_j^e,y_j^e)\in R^2|0\le x_j^e\le 1,0\le y_j^e\le 1\} \quad\times\quad \prod_{1\le j\le d, e\in\pi_k'}\{(x_j^e,y_j^e)\in R^2|0\le x_j^e\le 1,0\le y_j^e\le 1\}$$

という領域を e, j の組それぞれに対して, $H_{e,j}$, $\overline{H}_{e,j}$ のどちらか一方を選ぶことで以下のような $2^{2d\lambda}$ 個の領域に分割できる.

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{\prod_{1\le j\le d,e\in\pi_k}H_{e,j}\right\}\times\left\{\prod_{1\le j\le d,e\in\pi_k'}H_{e,j}\right\},\\ &\cdots\\ D_{2^{2d\lambda}} &= \left\{\prod_{1\le j\le d,e\in\pi_k}\overline{H}_{e,j}\right\}\times\left\{\prod_{1\le j\le d,e\in\pi_k'}\overline{H}_{e,j}\right\}.\end{aligned}$$

式 (4) の右辺において x_j^e, y_j^e などの変数は二回, あるいは四回ずつあらわれることに注意すると, $z_{\lambda,k}$ はある領域 D_l 上で,

$$z_{\lambda,k} = 2(v_1+\cdots+v_{i_{l,2}})+4(\overline{v}_1+\cdots+\overline{v}_{i_{l,4}}) \tag{5}$$

となる. ただし, v_i は係数が 2 である変数 (負の場合は符号も v_i に含める), $i_{l,2}$ はその変数の個数, $\overline{v}_i$ は係数が 4 である変数, $i_{l,4}$ はその個数をあらわす. $i_{l,2}=0$ あるいは $i_{l,4}=0$ となる場合もある. また, $i_{l,2}=i_{l,4}=0$ すなわち

$$z_{\lambda,k} = 0$$

となる場合もあることに注意する. ここで, 式 (5) の中の陽に出てくる変数のうちひとつを w_l とし, それ以外のすべての変数を係数も含めて w_l' とおく. ただし w_l として v_i を選ぶ場合は, $w_l=v_i$, また $\overline{v}_i$ を選ぶ場合は $w_l=2\overline{v}_i$ となる. すなわち, 領域 D_l をひとつ選ぶと

$$z_{\lambda,k} = 2w_l+w_l'$$

とあらわされる. ところで, d 次元単位超立方体に節点が一様に分布していることから, 節点の座標 x_j^e, y_j^e は互いに独立な区間 $[0,1]$ の一様分布とみなすと, 確率変数 X_j^e, Y_j^e と書くことができる. また, 同じように $z_{\lambda,k}$, w_l, w_l' も確率変数 $Z_{\lambda,k}$, W_l, W_l' とみなすことにすれば, W_l は W_l' とは独立な, 区間の幅 1 の間の一様分布, あるいは区間の幅 2 の間の一様分布となる. したがって,

$$\begin{aligned}
P\{0 < Z_{\lambda,k} \le t\} &= \sum_l P\{0 < Z_{\lambda,k} \le t | D_l\} P\{D_l\} \\
&\le \sum_l P\left\{ \frac{-W_l'}{2} < W_l \le \frac{-W_l' + t}{2} \middle| D_l \right\} P\{D_l\} \\
&\le \sum_l \frac{t}{2} P\{D_l\} \\
&\le \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

となる. ランダム TSP の場合と同様に, 任意の $\delta > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
P\{Z \le \delta\} &= P\{\min_k \{Z_{\lambda,k} | Z_{\lambda,k} > 0\} \le \delta\} \\
&\le \sum_k P\{0 < Z_{\lambda,k} \le \delta\} \\
&\le \sum_k \frac{\delta}{2} \\
&= |\Pi_{n,\lambda}| \frac{\delta}{2} \\
&\le n^{2\lambda} \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

となる. したがって $L = d$ となることに注意すれば, $\delta = \frac{2}{n^{2\lambda+1}}$ とおくと λ-opt の反復回数は確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で高々 $\frac{d}{2} n^{2\lambda+2}$ である. また, λ-opt を行なった場合に必要な反復回数の上限を確率変数 T であらわすとすると, その期待値は

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{i=1}^{n!} i P\{T = i\} \\
&\le \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \le T \le 2^j\} \\
&\le \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \le T\} \\
&\le \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \le \frac{nd}{Z}\} \\
&= \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{Z \le \frac{nd}{2^{j-1}}\} \\
&\le \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j n^{2\lambda} \frac{nd}{2^j} \\
&\le n^{2\lambda+1} d(\log n! + 1)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad n^{2\lambda+1} dn \log n$$
$$= \quad dn^{2\lambda+2} \log n$$

となり, 定理は証明された. □

注意 **3.1** 2-opt の場合, 反復回数の上限の期待値は $2n^6 \log n$ 以下となり定理 1.1 と同じ結果となっている. □

4 ユークリッド距離の場合

この節では, d 次元のランダムユークリッド TSP に対する 2-opt の確率的多項式性を証明する. 2-opt では, ある反復で使われる可能性のある $\Pi_{n,2}$ の一つの要素 (π_k, π'_k) に含まれる枝の端点は全部で 4 点になる. この 4 点を, $V(\pi_k) = \{x_k^1, x_k^2, x_k^3, x_k^4\}$ とする. その枝の長さ $l(\{x_k^1, x_k^2\})$ は 2 点 x_k^1, x_k^2 の間のユークリッド距離となる. 巡回路から $\pi_k = \{\{x_k^1, x_k^2\}, \{x_k^3, x_k^4\}\}$ を取り除き, $\pi'_k = \{\{x_k^1, x_k^4\}, \{x_k^2, x_k^3\}\}$ を付け加えると巡回路の長さは

$$z_{2,k} \quad = \quad l(\{x_k^1, x_k^2\}) + l(\{x_k^3, x_k^4\}) - l(\{x_k^1, x_k^4\}) - l(\{x_k^2, x_k^3\})$$

だけ短くなる. ここで, 固定した 3 点 x_k^1, x_k^2, x_k^3 に対し,

$$A_t(x_k^1, x_k^2, x_k^3) \quad = \quad \{x_k^4 \in [0,1]^d | 0 \leq z_{2,k} \leq t\}$$

とおく. x_k^4 が d 次元単位超立方体に一様に分布しているとすると, 確率変数 $Z_{2,k}$ に対する以下の条件付確率について

$$P\{0 < Z_{2,k} \leq t | x_k^1, x_k^2, x_k^3\} \quad \leq \quad |A_t(x_k^1, x_k^2, x_k^3)| \tag{6}$$

が成り立つ.

適当な座標変換を行うことによって x_k^1, x_k^3 は座標をそれぞれ $(-s, 0, \cdots, 0)$, $(s, 0, \cdots, 0)$ であるものとする. もとの単位立方体は, この新たな座標系では,

$$B \quad = \quad \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) | -\sqrt{d} \leq x_1 \leq \sqrt{d}, \sum_{i=2}^{d} (x_i)^2 \leq d\}$$

という領域に含まれる. 以下, この領域 B のなかで考える.

$$m(x) \quad = \quad l(\{x_k^1, x\}) - l(\{x_k^3, x\})$$

とおくと, $0 \leq z_{2,k} \leq t$ は,

$$m(x_k^2) - t \leq m(x_k^4) \leq m(x_k^2)$$

に等しい. したがって,

$$B_t \quad = \quad \{x \in B | m(x_k^2) - t \leq m(x) \leq m(x_k^2)\}$$

とすると,

$$|A_t(x_k^1, x_k^2, x_k^3)| \quad \leq \quad |B_t| \tag{7}$$

である. さらに, $u = m(x_k^2) - t$, $-2s \leq u \leq 2s - t$ について,

$$C_{u,t} \quad = \quad \{x \in B | u \leq m(x) \leq u + t\}$$

という領域を考えると, x_k^2 の位置とは無関係に

$$|B_t| \quad \leq \quad \max_{-2s \leq u \leq 2s-t} |C_{u,t}| \tag{8}$$

となる.

まず $|A_t(x_k^1, x_k^2, x_k^3)|$ に対して以下の命題を証明する.

命題 4.1 d 次元単位超立方体に点 x_k^1, x_k^2, x_k^3 が与えられたとき定数 K_1, K_2 が存在し, $d = 2$ の場合,

$$|A_t(x_k^1, x_k^2, x_k^3)| \quad \leq \quad K_1 \frac{\sqrt{t}}{l(\{x_k^1, x_k^3\})} \tag{9}$$

$d \geq 3$ の場合,

$$|A_t(x_k^1, x_k^2, x_k^3)| \quad \leq \quad K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} \frac{t}{l(\{x_k^1, x_k^3\})} \tag{10}$$

が成り立つ. ただし, $l(\{x_k^1, x_k^3\}) \neq 0$ とする.

証明. $|C_{u,t}|$ が u の値に関係なく, $d = 2$ の場合,

$$|C_{u,t}| \quad \leq \quad K_1 \frac{\sqrt{t}}{l(\{x_k^1, x_k^3\})}$$

$d \geq 3$ の場合,

$$|C_{u,t}| \quad \leq \quad K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} \frac{t}{l(\{x_k^1, x_k^3\})}$$

が成り立つことを証明する. 式 (7), (8) より命題が証明される.

$\{x | m(x) = u\}$ という点集合を考えると, この集合に含まれる点 $x = (x_1, \cdots, x_d)$ は,

$$\sqrt{(x_1 + s)^2 + \sum_{i=2}^{d} (x_i)^2} - \sqrt{(x_1 - s)^2 + \sum_{i=2}^{d} (x_i)^2} \quad = \quad u,$$

すなわち,

$$4(4s^2 - u^2)(x_1)^2 \quad = \quad u^2(4s^2 - u^2) + 4u^2 \sum_{i=2}^{d} (x_i)^2$$

をみたす. 例えば, 2 次元の場合の $m(x)$ のグラフは図 2 のようになる. まず,

$$\begin{aligned} W_1 \quad &= \quad \{x | -2s \leq m(x) \leq -s\} \\ W_2 \quad &= \quad \{x | -s \leq m(x) \leq 0\} \\ W_3 \quad &= \quad \{x | 0 \leq m(x) \leq s\} \\ W_4 \quad &= \quad \{x | s \leq m(x) \leq 2s\} \end{aligned}$$

の 4 つの領域に分け, $m(x) = u$, $m(x) = u + t$ がともにこの 4 つの領域の同じ領域に含まれる場合を考える. つまり,

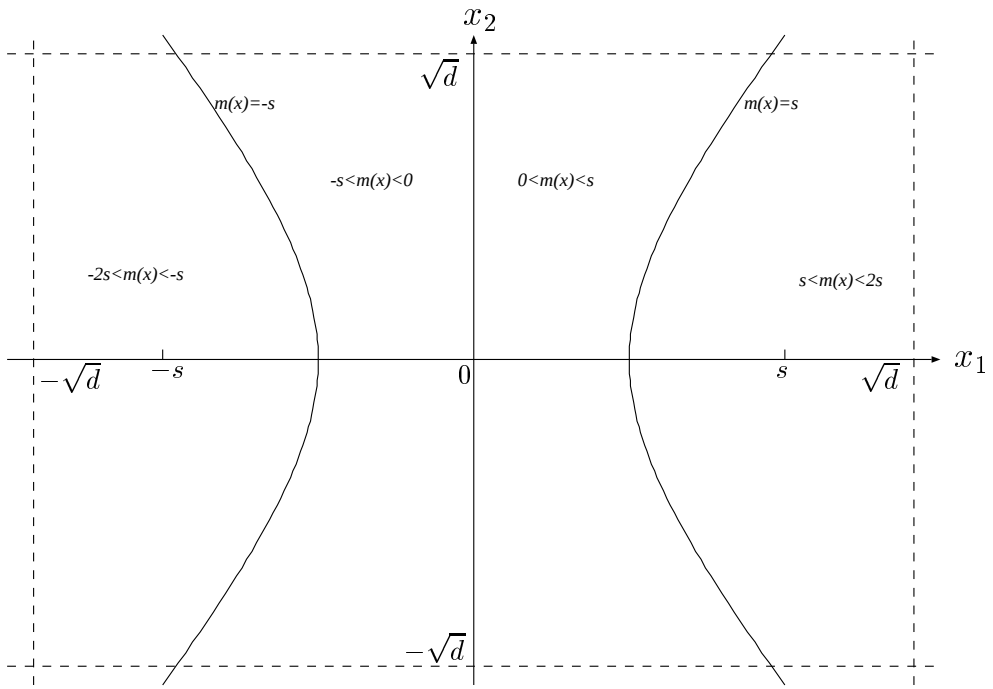

図 2: $m(x)$ のグラフ

Case 1: $\{x|u \le m(x) \le u+t\} \subset W_1$, すなわち $u \ge -2s$, $t \ge 0$, $u+t \le -s$ のとき.

Case 2: $\{x|u \le m(x) \le u+t\} \subset W_2$, すなわち $u \ge -s$, $t \ge 0$, $u+t \le 0$ のとき.

Case 3: $\{x|u \le m(x) \le u+t\} \subset W_3$, すなわち $u \ge 0$, $t \ge 0$, $u+t \le s$ のとき.

Case 4: $\{x|u \le m(x) \le u+t\} \subset W_4$, すなわち $u \ge s$, $t \ge 0$, $u+t \le 2s$ のとき.

の 4 つの場合について考える. はじめに Case 3 の場合に対して, 以下の補題を証明する.

補題 4.1 $u \ge 0$, $t \ge 0$, $u+t \le s$ のとき

$$|C_{u,t}| \quad \le \quad K_3 c_{d-1} d^{\frac{d}{2}} \frac{t}{s} \tag{11}$$

が成り立つ.

証明. このとき,

$$C_{u,t} \quad \subset \quad \left\{ x \,\middle|\, u \le m(x) \le u+t, \sum_{i=2}^{d} (x_i)^2 \le d \right\}$$

である (二次元の場合を図 3 であらわす). $u \le m(x) \le u+t$ は $\{x|m(x)=u\}$ と $\{x|m(x)=u+t\}$ に挟まれた領域であるので, $|C_{u,t}|$ は, $\{x|m(x)=u\}$ と $\{x|m(x)=u+t\}$ に挟まれた領域の x_1 方向の幅の最大値に, 半径 $\sqrt{d}$ の $d-1$ 次元の球の体積をかけたものよりちいさい. したがって,

$$|C_{u,t}| \quad \le \quad c_d d^{\frac{d-1}{2}} \max_u \left\{ (u+t)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4s^2-(u+t)^2}\sum_{i=2}^{d}(x_i)^2} - u\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4s^2-u^2}\sum_{i=2}^{d}(x_i)^2} \right\}$$

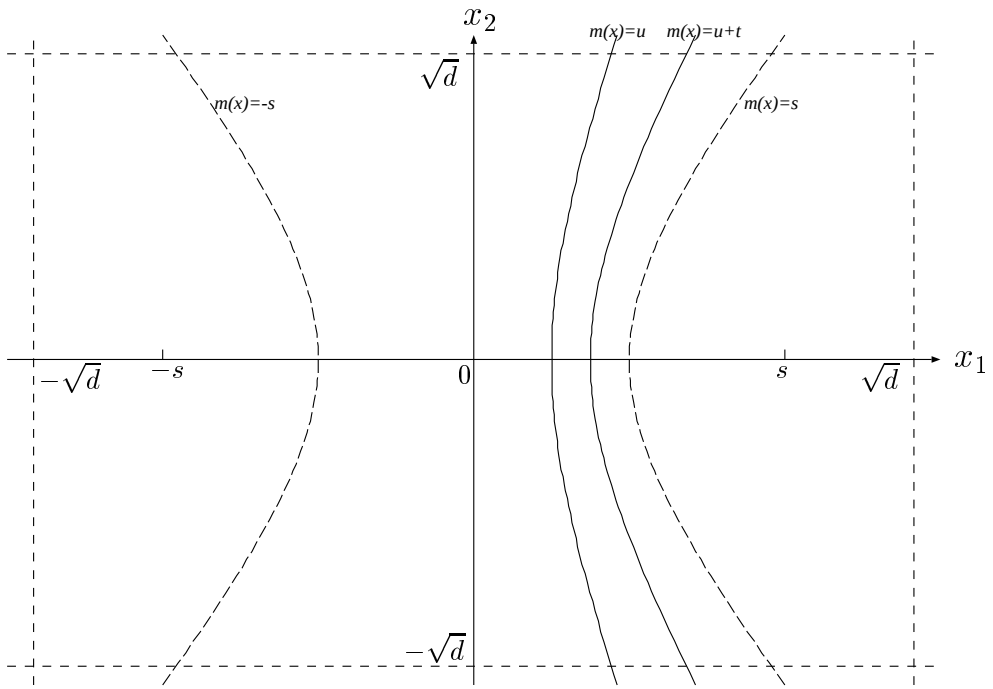

図 3: $\{x|0 \le m(x) \le s\}$ の場合

が成り立つ. ここで, c_d は d 次元単位球の体積をあらわす. $r = \sum_{i=2}^{d} (x_i)^2$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
& (u+t)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r}{4s^2-(u+t)^2}} - u\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r}{4s^2-u^2}} \\
= \;& (u+t)\sqrt{\frac{4s^2-(u+t)^2+4r}{4(4s^2-(u+t)^2)}} - u\sqrt{\frac{4s^2-u^2+4r}{4(4s^2-u^2)}} \\
\le \;& \frac{u+t}{2}\sqrt{\frac{4s^2-u^2+4r}{4s^2-(u+t)^2}} - \frac{u}{2}\sqrt{\frac{4s^2-u^2+4r}{4s^2-u^2}} \\
= \;& \frac{\sqrt{4s^2-u^2+4r}}{2\sqrt{4s^2-(u+t)^2}\sqrt{4s^2-u^2}} \left\{ (u+t)\sqrt{4s^2-u^2} - u\sqrt{4s^2-(u+t)^2} \right\}.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
& (u+t)\sqrt{4s^2-u^2} - u\sqrt{4s^2-(u+t)^2} \\
= \;& \frac{(u+t)^2(4s^2-u^2) - u^2(4s^2-(u+t)^2)}{(u+t)\sqrt{4s^2-u^2} + u\sqrt{4s^2-(u+t)^2}} \\
= \;& \frac{4s^2\left\{(u+t)^2-u^2\right\}}{(u+t)\sqrt{4s^2-u^2} + u\sqrt{4s^2-(u+t)^2}} \\
\le \;& \frac{4s^2(2u+t)t}{(2u+t)\sqrt{3s^2}} \\
= \;& \frac{4}{\sqrt{3}}st
\end{aligned}
$$

であるから,

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{4s^2-u^2+4r}}{2\sqrt{4s^2-(u+t)^2}\sqrt{4s^2-u^2}}\left\{(u+t)\sqrt{4s^2-u^2}-u\sqrt{4s^2-(u+t)^2}\right\} \\
\leq\ & \frac{\sqrt{4s^2-u^2+4r}}{2\sqrt{4s^2-(u+t)^2}\sqrt{4s^2-u^2}}\frac{4}{\sqrt{3}}st \\
\leq\ & \frac{2\sqrt{s^2+r}}{2\sqrt{3s^2}\sqrt{3s^2}}\frac{4}{\sqrt{3}}st \\
=\ & \frac{4\sqrt{s^2+r}}{3\sqrt{3}}\frac{t}{s} \\
\leq\ & \frac{4\sqrt{d+r}}{3\sqrt{3}}\frac{t}{s} \\
\leq\ & \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sqrt{d}\frac{t}{s}.
\end{aligned}$$

最後の不等式は $r=\sum_{i=2}^{d}(x_i)^2\leq d$ より従う. したがって,

$$\begin{aligned}
|C_{u,t}| &\leq \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sqrt{d}\frac{t}{s}c_{d-1}d^{\frac{d-1}{2}} \\
&\leq \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}c_{d-1}d^{\frac{d}{2}}\frac{t}{s}
\end{aligned}$$

ここで,

$$K_3 = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

とおくと補題は証明される. □

次に Case 4 の場合について以下の補題が成り立つことを示す.

補題 4.2 $u\geq s,\ t\geq 0,\ u+t\leq 2s$ のとき,

$$|C_{u,t}| \leq \begin{cases} K_4\frac{\sqrt{t}}{s} & \text{if} \quad d=2 \\ \frac{13}{4}c_{d-1}2^d d^{\frac{d}{2}}\frac{t}{s} & \text{if} \quad d\geq 3 \end{cases} \tag{12}$$

が成り立つ.

証明. $u\geq s,\ t\geq 0,\ u+t\leq 2s$ のとき,

$$C_{u,t} \subset \{x|u\leq m(x)\leq u+t, x_1\leq\sqrt{d}\}$$

である. ここで, x_1 は $\frac{u}{2}$ 以上であることを考慮すると, 図 4 からわかるように

$$\left|\left\{x|u\leq m(x)\leq 2s, x_1\leq\sqrt{d}\right\}\right| = \int_{\frac{u}{2}}^{\sqrt{d}} c_{d-1}\left(\frac{(4s^2-u^2)(4(x_1)^2-u^2)}{4u^2}\right)^{\frac{d-1}{2}}dx_1$$

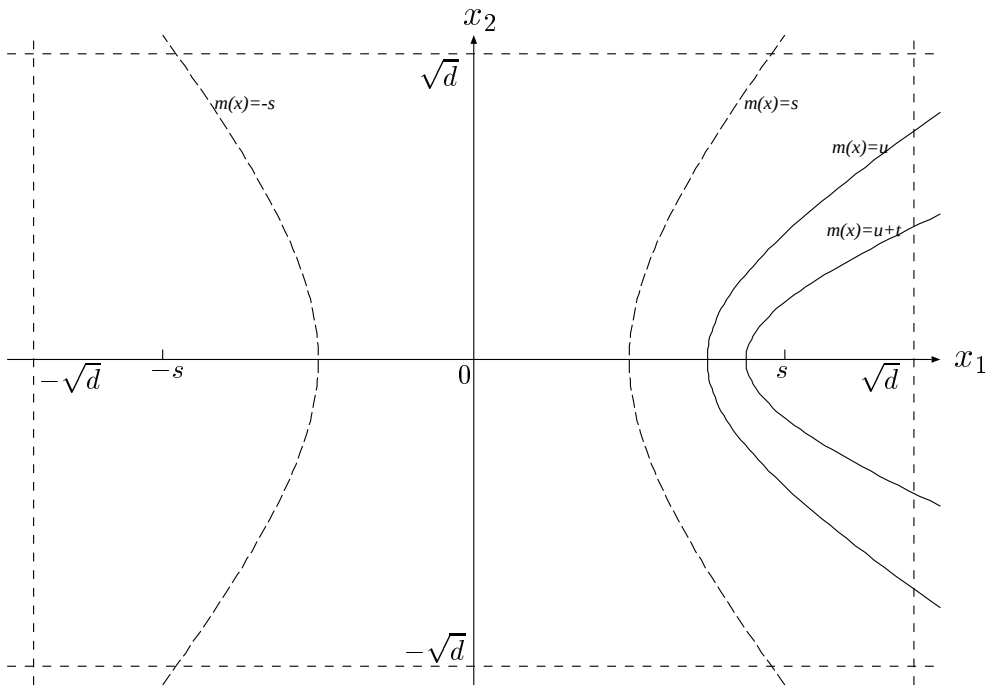

図 4: $\{x|s \le m(x) \le 2s\}$ の場合

となる. したがって,

$$
\begin{aligned}
& |C_{u,t}| \\
\le\ & \left|\left\{x|u \le m(x) \le u+t, x_1 \le \sqrt{d}\right\}\right| \\
=\ & \left|\left\{x|u \le m(x) \le 2s, x_1 \le \sqrt{d}\right\}\right| - \left|\left\{x|u+t \le m(x) \le 2s, x_1 \le \sqrt{d}\right\}\right| \\
=\ & \int_{\frac{u}{2}}^{\sqrt{d}} c_{d-1}\left(\frac{(4s^2-u^2)(4(x_1)^2-u^2)}{4u^2}\right)^{\frac{d-1}{2}} dx_1 \\
& - \int_{\frac{u+t}{2}}^{\sqrt{d}} c_{d-1}\left(\frac{(4s^2-(u+t)^2)(4(x_1)^2-(u+t)^2)}{4(u+t)^2}\right)^{\frac{d-1}{2}} dx_1 \\
=\ & \frac{c_{d-1}}{(2u)^{d-1}} \int_{\frac{u}{2}}^{\frac{u+t}{2}} (4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} dx_1 \\
& + c_{d-1} \int_{\frac{u+t}{2}}^{\sqrt{d}} \left\{ \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}(4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} - \frac{(4s^2-(u+t)^2)^{\frac{d-1}{2}}(4(x_1)^2-(u+t)^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2(u+t))^{d-1}} \right\} dx_1.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{c_{d-1}}{(2u)^{d-1}} \int_{\frac{u}{2}}^{\frac{u+t}{2}} (4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} dx_1, \\
S_2 &= c_{d-1} \int_{\frac{u+t}{2}}^{\sqrt{d}} \left\{ \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}(4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} - \frac{(4s^2-(u+t)^2)^{\frac{d-1}{2}}(4(x_1)^2-(u+t)^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2(u+t))^{d-1}} \right\} dx_1
\end{aligned}
$$

とおく.

$$
\begin{aligned}
S_1 &\leq \frac{c_{d-1}}{(2u)^{d-1}} \int_{\frac{u}{2}}^{\frac{u+t}{2}} (4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (2x_1)^{d-1} dx_1 \\
&= \frac{c_{d-1}}{u^{d-1}} (4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} \left[\frac{1}{d} (x_1)^d \right]_{\frac{u}{2}}^{\frac{u+t}{2}} \\
&= \frac{c_{d-1}}{du^{d-1}} (4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} \left\{ \left(\frac{u+t}{2} \right)^d - \left(\frac{u}{2} \right)^d \right\} \\
&= \frac{c_{d-1}}{du^{d-1}} (4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{u+t}{2} - \frac{u}{2} \right) \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{u+t}{2} \right)^{d-i} \left(\frac{u}{2} \right)^{i-1} \\
&\leq \frac{c_{d-1}}{ds^{d-1}} (2s)^{d-1} \frac{t}{2} \frac{d}{2^{d-1}} (2s)^{d-1} \\
&= \frac{c_{d-1} t}{2} (2s)^{d-1}
\end{aligned}
$$

である. また,

$$
\begin{aligned}
S_2 &= c_{d-1} \int_{\frac{u+t}{2}}^{\sqrt{d}} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left(\frac{u}{u+t} \right)^{d-1} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4s^2-u^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4(x_1)^2-u^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \right\} dx_1 \\
&= c_{d-1} \int_{\frac{u+t}{2}}^{s} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left(\frac{u}{u+t} \right)^{d-1} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4s^2-u^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4(x_1)^2-u^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \right\} dx_1 \\
&\quad + c_{d-1} \int_{s}^{\sqrt{d}} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left(\frac{u}{u+t} \right)^{d-1} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4s^2-u^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4(x_1)^2-u^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \right\} dx_1 \\
&\leq c_{d-1} \int_{\frac{u+t}{2}}^{s} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} \left\{ 1 - \left(\frac{u}{u+t} \right)^{d-1} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4(x_1)^2-u^2} \right)^{d-1} \right\} dx_1 \\
&\quad + c_{d-1} \int_{s}^{\sqrt{d}} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} \left\{ 1 - \left(\frac{u}{u+t} \right)^{d-1} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4s^2-u^2} \right)^{d-1} \right\} dx_1.
\end{aligned}
$$

ここで, $0 \leq x \leq 1$ に対して,

$$
1 - x^k = (1-x)(1+x+x_k^2+\cdots+x^{k-1}) \leq k(1-x)
$$

であることに注意すると,

$$
S_2 \leq c_{d-1} \int_{\frac{u+t}{2}}^{s} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}} (4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}} (d-1) \left\{ 1 - \frac{u}{u+t} \left(1 - \frac{2ut+t^2}{4(x_1)^2-u^2} \right) \right\} dx_1
$$

$$
\begin{aligned}
&+c_{d-1}\int_s^{\sqrt{d}} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}(4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}}(d-1)\left\{1-\frac{u}{u+t}\left(1-\frac{2ut+t^2}{4s^2-u^2}\right)\right\}dx_1\\
\leq\ & c_{d-1}\int_{\frac{u+t}{2}}^{s} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}(4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}}\frac{(d-1)(4s^2+u(u+t))t}{(u+t)(4(x_1)^2-u^2)}dx_1\\
&+c_{d-1}\int_s^{\sqrt{d}} \frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}(4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2u)^{d-1}}\frac{(d-1)(4s^2+u(u+t))t}{(u+t)(4s^2-u^2)}dx_1\\
\leq\ & c_{d-1}\frac{(2s)^{d-1}(d-1)8s^2t}{(2s)^{d-1}s}\int_{\frac{u+t}{2}}^{s}(4(x_1)^2-u^2)^{\frac{d-3}{2}}dx_1\\
&+c_{d-1}\frac{(4s^2-u^2)^{\frac{d-3}{2}}(d-1)8s^2t}{(2s)^{d-1}s}\int_s^{\sqrt{d}}(2x_1)^{d-1}dx_1
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $d=2$ の場合には,

$$
\begin{aligned}
|C_{u,t}| &\leq c_1st+8c_1st\int_{\frac{u+t}{2}}^{s}\frac{1}{\sqrt{4(x_1)^2-u^2}}dx_1+c_1\frac{8t}{\sqrt{4s^2-u^2}}\int_s^{\sqrt{2}}x_1dx_1\\
&\leq c_1st+8c_1sts\frac{1}{\sqrt{2ut+t^2}}+c_1\frac{8t}{\sqrt{2ut+t^2}}\\
&\leq c_1st+8c_1s^2t\frac{1}{\sqrt{2st}}+c_1\frac{8t}{\sqrt{2st}}\\
&= c_1\{s^2\sqrt{t}+\frac{8s^3}{\sqrt{2s}}+\frac{8s}{\sqrt{2s}}\}\frac{\sqrt{t}}{s}\\
&\leq 2\{2\cdot 2^{\frac{1}{4}}+8\cdot 2^{\frac{3}{4}}+4\cdot 2^{\frac{3}{4}}\}\frac{\sqrt{t}}{s}.
\end{aligned}
$$

また, $d\geq 3$ のときは,

$$
\begin{aligned}
|C_{u,t}| &\leq c_{d-1}\frac{t}{2}(2s)^{d-1}+c_{d-1}(d-1)8st\int_{\frac{u+t}{2}}^{s}(2x_1)^{d-3}dx_1\\
&\quad +c_{d-1}\frac{(2s)^{d-3}(d-1)8s^2t}{s^d}\int_s^{\sqrt{d}}(x_1)^{d-1}dx_1\\
&\leq c_{d-1}2^{d-2}ts^{d-1}+c_{d-1}(d-1)2^dst\frac{1}{d-2}s^{d-2}+c_{d-1}2^d\frac{(d-1)t}{s}\frac{1}{d}d^{\frac{d}{2}}\\
&= c_{d-1}2^d\frac{t}{s}\left\{\frac{1}{4}s^d+\frac{d-1}{d-2}s^d+\frac{d-1}{d}d^{\frac{d}{2}}\right\}\\
&\leq c_{d-1}2^d\frac{t}{s}\left\{\frac{1}{4}d^{\frac{d}{2}}+2d^{\frac{d}{2}}+d^{\frac{d}{2}}\right\}\\
&= \frac{13}{4}c_{d-1}2^dd^{\frac{d}{2}}\frac{t}{s}.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
K_4 = 2\{2\cdot 2^{\frac{1}{4}}+8\cdot 2^{\frac{3}{4}}+4\cdot 2^{\frac{3}{4}}\}
$$

とおくと, 補題が証明される. □

$\{x|m(x)=u\}$ と $\{x|m(x)=-u\}$ は $x_1=0$ に関して対称であるので, Case 1 のときにも式 (12) が成り立ち, Case 2 のときにも式 (11) が成り立つ.

命題 **4.1** の証明の続き: 一般の場合, すなわち, $u\geq -2s$, $t\geq 0$, $u+t\leq 2s$ のとき 式 (9), あるいは式 (10) が成り立つことを示す ($\{x|m(x)>2s\}$ はあきらかに空集合なので, $u+t>2s$ となる

ことを考慮する必要はない). ここでは, $-2s \le u < -s$ で, かつ $s < u+t \le 2s$ となっている場合についてのみ証明する. ほかの場合も同様に証明できる.

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \{x | u \le m(x) \le -s\}, \\
C^2 &= \{x | -s \le m(x) \le 0\}, \\
C^3 &= \{x | 0 \le m(x) \le s\}, \\
C^4 &= \{x | s \le m(x) \le u+t\}
\end{aligned}
$$

とおくと, $C^i \subset W_i$, $\bigcup_i C^i = C_{u,t}$ である. したがって, $d=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
|C_{u,t}| &\le K_4 \frac{\sqrt{-s-u}}{s} + 2K_3 c_1 \frac{s}{s} + 2K_3 c_1 \frac{s}{s} + K_4 \frac{\sqrt{u+t-s}}{s} \\
&\le K_4 \frac{\sqrt{t}}{s} + 2K_3 c_1 \frac{t}{s} + K_4 \frac{\sqrt{t}}{s} \\
&\le 2K_4 \frac{\sqrt{t}}{s} + 4\sqrt[4]{2} K_3 \frac{\sqrt{t}}{s}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $l(\{x_k^1, x_k^3\}) = 2s$ であることから,

$$
K_1 = 4K_4 + 8\sqrt[4]{2} K_3
$$

とおけばよい. また $d \ge 3$ のときは,

$$
\begin{aligned}
|C_{u,t}| &\le \frac{13}{4} c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} \frac{-s-u}{s} + K_3 c_{d-1} d^{\frac{d}{2}} \frac{s}{s} + K_3 c_{d-1} d^{\frac{d}{2}} \frac{s}{s} + \frac{13}{4} c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} \frac{u+t-s}{s} \\
&\le \max\left\{ \frac{13}{4} c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}}, K_3 c_{d-1} d^{\frac{d}{2}} \right\} \frac{t}{s} \\
&= \frac{13}{4} c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} \frac{t}{s}
\end{aligned}
$$

となる. したがって,

$$
K_2 = \frac{13}{2}
$$

とおけばよい. 以上より命題 4.1 が証明された. □

ここで,

$$
f_d(t) = \begin{cases} K_1 \sqrt{t} & \text{if} \quad d=2 \\ K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t & \text{if} \quad d \ge 3 \end{cases}
$$

とおくと, 式 (9), (10) は,

$$
|A_t(x_k^1, x_k^2, x_k^3)| \le \frac{f_d(t)}{l(\{x_k^1, x_k^3\})} \tag{13}
$$

と書くことができる.

$(\pi_k, \pi_k') \in \Pi_{n,2}$ をひとつ選び, 節点集合 $V(\pi_k)$ に対し, $\pi_k = \{\{x_k^1, x_k^2\}, \{x_k^3, x_k^4\}\}$, $\pi_k' = \{\{x_k^1, x_k^4\}, \{x_k^2, x_k^3\}\}$ となるように節点の番号 x_k^1, x_k^2, x_k^3, x_k^4 を適当に与える.

ここで, 以下の補題を証明する.

補題 **4.3** $n \geq 5$ である TSP での 2-opt に対する $(\pi_{k1}, \pi'_{k1}, \pi_{k2}, \pi'_{k2}) \in \Pi^{(2)}_{n,2}$ について, 節点 x^4_{k1}, x^4_{k2} が d 次元単位超立方体に一様に互いに独立に分布しているとすると,

$$P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | x^1_{k1}, x^2_{k1}, x^3_{k1}, x^1_{k2}, x^2_{k2}, x^3_{k2}\} \quad \leq \quad \frac{(f_d(t))^2}{l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\})l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\})}$$

が成り立つように節点の番号付けができる. ここで, 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ は $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| \neq 2$ のときは異なる枝に取れるが, $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 2$ のときは, 同じ枝となることがある.

証明. まず, $V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2}) = \phi$ のときは, 式 (13) より,

$$\begin{aligned} |A_t(x^1_{k1}, x^2_{k1}, x^3_{k1})| \quad &\leq \quad \frac{f_d(t)}{l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\})} \\ |A_t(x^1_{k2}, x^2_{k2}, x^3_{k2})| \quad &\leq \quad \frac{f_d(t)}{l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\})} \end{aligned}$$

となる. また, x^4_{k1}, x^4_{k2} は異なるグラフ上の節点であり d 次元単位超立方体に一様に互いに独立に分布しているので,

$$\begin{aligned} & P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | x^1_{k1}, x^2_{k1}, x^3_{k1}, x^1_{k2}, x^2_{k2}, x^3_{k2}\} \\ \leq \quad & P\{|A_t(x^1_{k1}, x^2_{k2}, x^3_{k2})| \leq t, |A_t(x^1_{k2}, x^2_{k2}, x^3_{k2})| \leq t | x^1_{k1}, x^2_{k1}, x^3_{k1}, x^1_{k2}, x^2_{k2}, x^3_{k2}\} \\ \leq \quad & \frac{(f_d(t))^2}{l(\{x^1_{k1}, x^3_{k3}\})l(\{x^1_{k1}, x^3_{k2}\})} \end{aligned} \tag{14}$$

となる. あきらかに, 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ は異なる枝である.

つぎに, $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 1$ の場合を考える. この場合, $V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})$ に含まれる唯一の点を, x^2_{k1} でありかつ x^2_{k2} であると考える. すると, x^4_{k1}, x^4_{k2} はグラフ上の異なる節点となり, この場合も式 (14) が成り立つ. また, 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ は異なる枝である.

$|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 3$ の場合は, $V(\pi_{k1}) - V(\pi_{k2})$ に含まれる唯一の点を x^4_{k1}, $V(\pi_{k2}) - V(\pi_{k1})$ に含まれる唯一の点を x^4_{k2} と考える. すると, x^4_{k1}, x^4_{k2} はグラフ上の異なる節点となり, この場合も式 (14) が成り立つ. また, 図 5 のように枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ は異なる枝となる. なぜなら, もし, 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ が同じ枝なら図 6 のようになる. しかし, この組合わせで反復を行うと, 図 7 のようになり, π'_{k2} を付け加えることによって巡回路を再構成することができない.

次に, $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 4$ の場合であるが, このようなことは, $n \geq 5$ の場合には, 起らない.

最後に, $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 2$ の場合であるが, この場合, $V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})$ に含まれない点から x^4_{k1} と x^4_{k2} を選ぶ. すると, この場合も式 (14) が成り立つが, 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ が同じ枝となる場合がある. □

補題 4.3 から以下の定理が成り立つ.

定理 **4.1** 2 次元単位平面上に節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義される問題において 2-opt は確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で反復回数は高々 $32\sqrt{2}\pi^2 K_1^2 n^{10}$ である. また, 反復回数の期待値は $O(n^{10} \log n)$ 以下である.

証明. ϵ を任意の正数とする. $(\pi_{k1}, \pi'_{k1}, \pi_{k2}, \pi'_{k2}) \in \Pi^{(2)}_{n,\lambda}$ において, 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ が異なる枝であるとき,

$$P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | \{x^1_{k1}, x^3_{k1}\} \neq \{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}\}$$

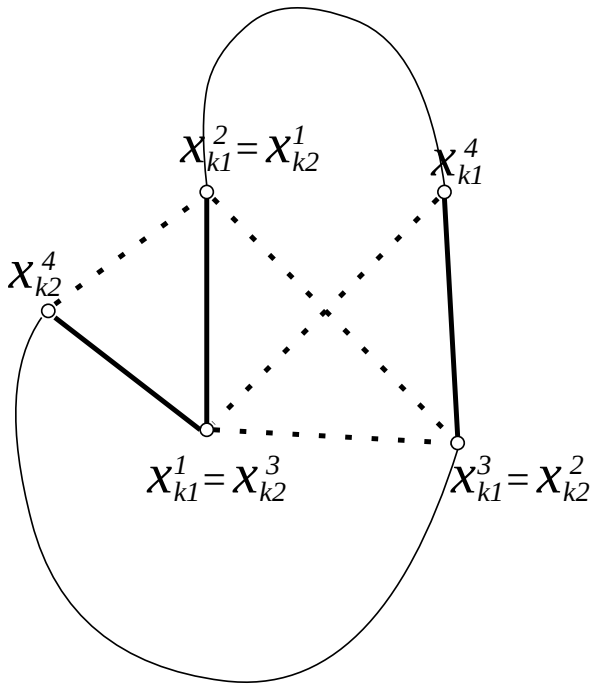

図 5: $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 3$ の場合

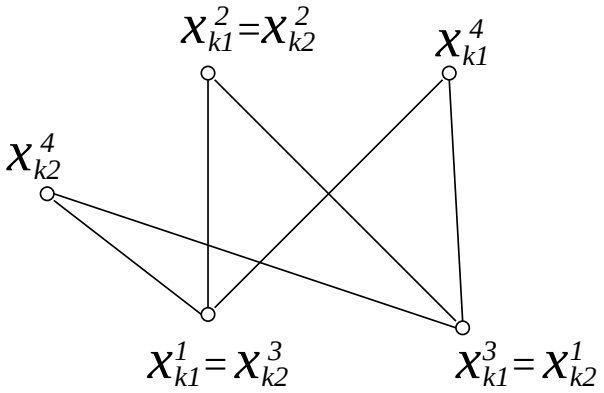

図 6: 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ が同じ枝の場合

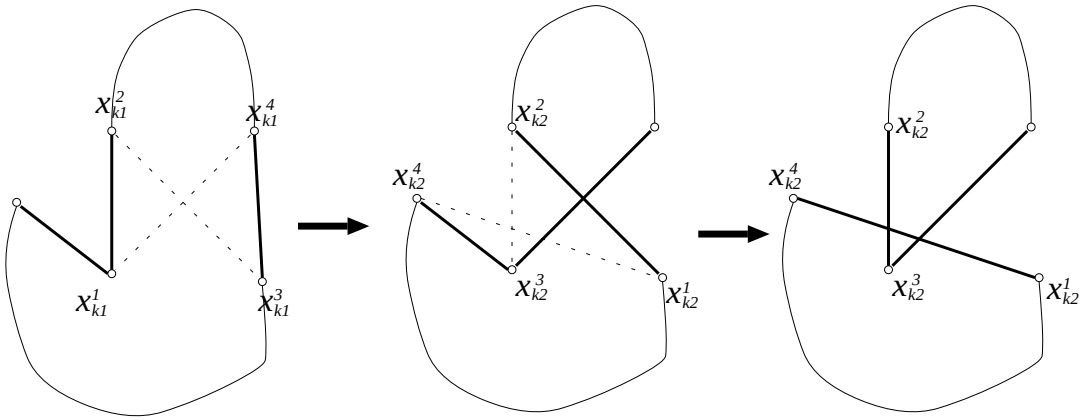

図 7: 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ が同じ枝の場合

$$
\begin{aligned}
\leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} P\{0 < Z_{2,k} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\} \\
& \times P\{i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\} \\
& + P\{0 \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < \epsilon, 0 \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < \epsilon\}
\end{aligned}
$$

となる. また $P\{i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\}$ は x^1_{k1} を中心とする半径 $i\epsilon$ の円と半径 $(i+1)\epsilon$ の円の間に x^3_{k1} が存在し, x^1_{k2} を中心とする半径 $j\epsilon$ の円と半径 $(j+1)\epsilon$ の円の間に x^3_{k2} が存在する確率である. もし, 点 x^3_{k1} と x^3_{k2} が同一の点であるときは, この x^3_{k1} を中心とする円の中に x^1_{k1} と x^1_{k2} が存在する確率をあらわすものとみなすことにより,

$$
\begin{aligned}
& P\{i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\} \\
\leq & \{c_2((i+1)\epsilon)^2 - c_2(i\epsilon)^2\}\{c_2((j+1)\epsilon)^2 - c_2(j\epsilon)^2\} \\
= & (2i+1)(2j+1)\pi^2\epsilon^4
\end{aligned}
$$

となる. 補題 4.3 より,

$$
\begin{aligned}
& P\{0 < Z_{2,k} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | \{x^1_{k1}, x^3_{k1}\} \neq \{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}\} \\
\leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} \frac{(f_2(t))^2}{ij\epsilon^2}(2i+1)(2j+1)\pi^2\epsilon^4 \\
& + P\{0 \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < \epsilon, 0 \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < \epsilon\} \\
\leq & (f_2(t))^2\pi^2 \left\{ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} \frac{2i+1}{i}\epsilon \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} \frac{2j+1}{j}\epsilon \right\} + \pi^2\epsilon^4 \\
\leq & (f_2(t))^2\pi^2 \left\{ 2\sqrt{2} + \epsilon \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} \frac{1}{i} \right\} \left\{ 2\sqrt{2} + \epsilon \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \rfloor} \frac{1}{j} \right\} + \pi^2\epsilon^4 \\
\leq & (f_2(t))^2\pi^2 \left\{ 2\sqrt{2} + \epsilon \left(1 + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}} \frac{1}{\xi} d\xi \right) \right\}^2 + \pi^2\epsilon^4
\end{aligned}
$$

$$= (f_2(t))^2\pi^2\left\{2\sqrt{2}+\epsilon\left(1+\ln\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\right)\right\}^2+\pi^2\epsilon^4$$

となる. ϵ は任意なので

$$P\{0<Z_{2,k1}\le t, 0<Z_{2,k2}\le t\} \le 8\pi^2(f_2(t))^2$$

となる. また, 枝 $\{x^1_{k1},x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2},x^3_{k2}\}$ が同じ枝の場合,

$$\begin{aligned}
& P\{0<Z_{2,k1}\le t, 0<Z_{2,k2}\le t|\{x^1_{k1},x^3_{k1}\}=\{x^1_{k2},x^3_{k2}\}\} \\
\le & \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{\sqrt{d}}{\epsilon}\rfloor} P\{0<Z_{2,k1}\le t, 0<Z_{2,k2}\le t|i\epsilon\le l(\{x^1_{k1},x^3_{k1}\})<(i+1)\epsilon\}P\{i\epsilon\le l(\{x^1_{k1},x^3_{k1}\})<(i+1)\epsilon\} \\
& +P\{0\le l(\{x^1_{k1},x^3_{k1}\})<\epsilon\} \\
\le & \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\rfloor}\frac{(f_2(t))^2}{i^2\epsilon^2}(2i+1)\pi\epsilon^2+\pi\epsilon^2 \\
= & (f_2(t))^2\pi\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\rfloor}\frac{2i+1}{i^2}+\pi\epsilon^2 \\
= & (f_2(t))^2\pi\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\rfloor}\left(\frac{2}{i}+\frac{1}{i^2}\right)+\pi\epsilon^2 \\
\le & (f_2(t))^2\pi\left(2+2\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}}\frac{1}{\xi}d\xi+1+\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}}\frac{1}{\xi^2}d\xi\right)+\pi\epsilon^2 \\
= & (f_2(t))^2\pi\left(2+2\ln\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}+1+1-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)+\pi\epsilon^2 \\
\le & (f_2(t))^2\pi\left(4+2\ln\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\right)+\pi\epsilon^2
\end{aligned}$$

となる. 枝 $\{x^1_{k1},x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2},x^3_{k2}\}$ が同じ枝となるのは補題 4.3 より, $|V(\pi_{k1})\cap V(\pi_{k2})|=2$ のときだけである. あとで示すように $\Pi^{(2)}_{n,2}$ の中で, $|V(\pi_{k1})\cap V(\pi_{k2})|=2$ となる組合せの個数は高々$\frac{9}{2}n^6$ 通りである. さらに式 (3) より $|\Pi^{(2)}_{n,2}|\le n^8$ であるので, 任意の $\delta>0$ に対して,

$$\begin{aligned}
P\{Z^{(2)}\le\delta\} &= P\left\{\min_{\Pi^{(2)}_{n,2}}\{\max\{Z_{2,k1},Z_{2,k2}\}|Z_{2,k1}>0,Z_{2,k2}>0\}\le\delta\right\} \\
&\le \sum_{\Pi^{(2)}_{n,2}} P\{0<Z_{2,k1}\le\delta,0<Z_{2,k2}\le\delta\} \\
&\le n^8P\{0<Z_{2,k1}\le\delta,0<Z_{2,k2}\le\delta|\{x^1_{k1},x^3_{k1}\}\ne\{x^1_{k2},x^3_{k2}\}\} \\
&\quad +\frac{9}{2}n^6P\{0<Z_{2,k1}\le\delta,0<Z_{2,k2}\le\delta|\{x^1_{k1},x^3_{k1}\}=\{x^1_{k2},x^3_{k2}\}\} \\
&\le n^88\pi^2(f_2(\delta))^2+\frac{9}{2}n^6\left\{(f_2(\delta))^2\pi\left(4+2\ln\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\right)+\pi\epsilon^2\right\} \\
&= n^88\pi^2K_1^2\delta+\frac{9}{2}n^6\left\{K_1^2\delta\pi\left(4+2\ln\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\right)+\pi\epsilon^2\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ. ϵ は, 任意なので $\epsilon = \sqrt{\delta}$ とすると,

$$P\{Z^{(2)} \leq \delta\} \quad \leq \quad n^8 8\pi^2 K_1^2 \delta + \frac{9}{2} n^6 \left\{ K_1^2 \delta \pi \left(4 + \ln \frac{2}{\delta} \right) + \pi \delta \right\} \tag{15}$$

となる. ここで, $\delta = \frac{1}{16\pi^2 K_1^2 n^9}$ とおくと,

$$P\left\{ Z^{(2)} \leq \frac{1}{16\pi^2 K_1^2 n^9} \right\} \quad \leq \quad \frac{1}{2n} + \frac{9}{32\pi K_1^2 n^3} \left\{ K_1^2 \left(4 + \ln(32\pi^2 K_1^2 n^9) \right) + 1 \right\}$$

となる. 右辺の第二項は $n \geq 3$ のとき $\frac{1}{2n}$ より小さいので

$$\begin{aligned} P\left\{ Z^{(2)} \leq \frac{1}{16\pi^2 K_1^2 n^9} \right\} &\leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となる. $L = \sqrt{2}$ であることに注意すると, 確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で反復回数は高々 $32\sqrt{2}\pi^2 K_1^2 n^{10}$ である. 反復回数の上限の期待値については, 式 (15) より,

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{i=1}^{n!} i P\{T = i\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \leq T \leq 2^j\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \leq T\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{2^{j-1} \leq \frac{2\sqrt{2}n}{Z^{(2)}}\} \\ &= \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j P\{Z^{(2)} \leq \frac{2\sqrt{2}n}{2^{j-1}}\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} 2^j \left[n^8 8\pi^2 K_1^2 \frac{2\sqrt{2}n}{2^{j-1}} + \frac{9}{2} n^6 \left\{ K_1^2 \frac{2\sqrt{2}n}{2^{j-1}} \pi \left(4 + \ln \frac{2^j}{2\sqrt{2}n} \right) + \pi \frac{2\sqrt{2}n}{2^{j-1}} \right\} \right] \\ &\leq 32\sqrt{2}\pi^2 K_1^2 n^9 (\log n! + 1) + 18\sqrt{2}\pi (4K_1^2 + 1) n^7 (\log n! + 1) + 18\sqrt{2}\pi K_1^2 n^7 \sum_{j=1}^{\lceil \log n! \rceil} j \ln 2 \\ &\leq 32\sqrt{2}\pi^2 K_1^2 n^{10} \log n + 18\sqrt{2}\pi (4K_1^2 + 1) n^8 \log n + 18\sqrt{2}\pi K_1^2 n^7 \frac{(\log n! + 1)(\log n! + 2)}{2} \ln 2 \\ &\leq 32\sqrt{2}\pi^2 K_1^2 n^{10} \log n + 18\sqrt{2}\pi (4K_1^2 + 1) n^8 \log n + 18\sqrt{2}\pi K_1^2 n^9 \log^2 n \end{aligned}$$

となる.

最後に $\Pi_{n,2}^{(2)}$ の中で, $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 2$ となる組合せの個数は高々 $\frac{9}{2} n^6$ 通りであることを示して証明をおわる. $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 2$ なので, $|V(\pi_{k1}) \cup V(\pi_{k2})| = 6$ である. その 6 つの節点の選び方は $\begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix}$ 通りある. 6 つの節点を, $V(\pi_{k1}) - V(\pi_{k2})$, $V(\pi_{k2}) - V(\pi_{k1})$, $V(\pi_{k2}) \cap V(\pi_{k1})$ にそれぞれ 2 つずつに分ける組合せの数が $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 90$ 通りある. この組合せを決めると,

$V(\pi_{k1})$, $V(\pi_{k2})$ それぞれの 4 つの節点が決まる. $V(\pi_{k1})$ の節点が決まると, π_{k1}, π'_{k1} の枝の取り方はそれぞれ 3 通りあるが, $\pi_{k1} \neq \pi'_{k1}$ となるように取らなければならないので, π_{k1}, π'_{k1} の取り方は 6 通りとなる. $V(\pi_{k2})$ の節点に対する, π_{k2}, π'_{k2} の枝の取り方も 6 通りとなるので, $\Pi^{(2)}_{n,2}$ の中で, $|V(\pi_{k1}) \cap V(\pi_{k2})| = 2$ となる組合せの個数は

$$\begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix} 90 \times 6 \times 6 \quad \leq \quad \frac{9}{2} n^6$$

となる. □

注意 **4.1** [5] では $1 - \frac{c}{n}$ 以上の確率で反復回数は $O(n^{16})$ となるという結果が導かれているが, 上の定理はそれよりよい結果となっている. □

また, 3 次元以上の問題に対しては以下の定理が成り立つ.

定理 **4.2** $d(d \geq 3)$ 次元単位平面上に節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義される問題において 2-opt は確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で反復回数は高々 $4K_2 c_d c_{d-1} 2^d d^{d-\frac{1}{2}} n^{5.5}$ である.

証明. ϵ を任意の正数とする. $(\pi_{k1}, \pi'_{k1}, \pi_{k2}, \pi'_{k2}) \in \Pi^{(2)}_{n,2}$ において, 枝 $\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}$ と $\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}$ が異なる枝であるとき,

$$\begin{aligned}
& P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | \{x^1_{k1}, x^3_{k1}\} \neq \{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}\} \\
\leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\} \\
& \times P\{i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\} \\
& + P\{0 \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < \epsilon, 0 \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < \epsilon\}
\end{aligned}$$

となる. ここで $P\{i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\}$ は x^1_{k1} を中心とする半径 $i\epsilon$ の球と半径 $(i+1)\epsilon$ の球の間に x^3_{k1} が存在し, x^1_{k2} を中心とする半径 $j\epsilon$ の球と半径 $(j+1)\epsilon$ の球の間に x^3_{k2} が存在する確率である. もし, 点 x^3_{k1} と x^3_{k2} が同一の点であるときは, この x^3_{k1} を中心とする球の中に x^1_{k1} と x^1_{k2} が存在する確率をあらわすものとみなすことにより,

$$\begin{aligned}
& P\{i\epsilon \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}) < (i+1)\epsilon, j\epsilon \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < (j+1)\epsilon\}) \\
\leq & \{c_d((i+1)\epsilon)^d - c_d(i\epsilon)^d\}\{c_d((j+1)\epsilon)^d - c_d(j\epsilon)^d\} \\
= & c_d^2 \epsilon^{2d} \{(i+1)^d - i^d\}\{(j+1)^d - j^d\}
\end{aligned}$$

となる. 補題 4.3 より,

$$\begin{aligned}
& P\{0 < Z_{2,k} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | \{x^1_{k1}, x^3_{k1}\} \neq \{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}\} \\
\leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \frac{(f_d(t))^2}{ij\epsilon^2} c_d^2 \epsilon^{2d} \{(i+1)^d - i^d\}\{(j+1)^d - j^d\} \\
& + P\{0 \leq l(\{x^1_{k1}, x^3_{k1}\}) < \epsilon, 0 \leq l(\{x^1_{k2}, x^3_{k2}\}) < \epsilon\} \\
\leq & (f_d(t))^2 c_d^2 \epsilon^{2d-2} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \left\{ \frac{i+1}{i} (i+1)^{d-1} - i^{d-1} \right\} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \left\{ \frac{j+1}{j} (j+1)^{d-1} - j^{d-1} \right\} + c_d^2 \epsilon^{2d}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (f_d(t))^2 c_d^2 \epsilon^{2d-2} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \left\{ (i+1)^{d-1} - i^{d-1} + \frac{(i+1)^{d-1}}{i} \right\} \right]^2 + c_d^2 \epsilon^{2d} \\
&= (f_d(t))^2 c_d^2 \epsilon^{2d-2} \left\{ \left(\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor + 1 \right)^{d-1} - 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \frac{(i+1)^{d-1}}{i} \right\}^2 + c_d^2 \epsilon^{2d} \\
&\leq (f_d(t))^2 c_d^2 \epsilon^{2d-2} \left\{ \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 1 \right)^{d-1} - 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} 2(i+1)^{d-2} \right\}^2 + c_d^2 \epsilon^{2d} \\
&\leq (f_d(t))^2 c_d^2 \epsilon^{2d-2} \left\{ \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 1 \right)^{d-1} - 1 + \int_1^{\frac{\sqrt{d}}{\epsilon}+1} 2(\xi+1)^{d-2} d\xi \right\}^2 + c_d^2 \epsilon^{2d} \\
&= (f_d(t))^2 c_d^2 \epsilon^{2d-2} \left\{ \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 1 \right)^{d-1} - 1 + \frac{2}{d-1} \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 2 \right)^{d-1} - \frac{2^d}{d-1} \right\}^2 + c_d^2 \epsilon^{2d}
\end{aligned}
$$

となる. ϵ は任意なので

$$
P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t\} \leq 4d^{d-1} c_d^2 (f_d(t))^2
$$

となる. また, 枝 $\{x_{k1}^1, x_{k1}^3\}$ と $\{x_{k2}^1, x_{k2}^3\}$ が同じ枝の場合,

$$
\begin{aligned}
& P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | \{x_{k1}^1, x_{k1}^3\} = \{x_{k2}^1, x_{k2}^3\}\} \\
\leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t | i\epsilon \leq l(\{x_{k1}^1, x_{k1}^3\}) < (i+1)\epsilon\} \\
& \times P\{i\epsilon \leq l(\{x_{k1}^1, x_{k1}^3\}) < (i+1)\epsilon\} + P\{0 \leq l(\{x_{k1}^1, x_{k1}^3\}) < \epsilon\} \\
\leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \frac{(f_d(t))^2}{i^2 \epsilon^2} c_d \epsilon^d \{(i+1)^d - i^d\} + c_d \epsilon^d \\
= & (f_d(t))^2 \epsilon^{d-2} c_d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \left\{ \frac{(i+1)^d}{i^2} - i^{d-2} \right\} + c_d \epsilon^d \\
= & (f_d(t))^2 \epsilon^{d-2} c_d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \left\{ (i+1)^{d-2} - i^{d-2} + \frac{(2i+1)(i+1)}{i^2} (i+1)^{d-3} \right\} + c_d \epsilon^d \\
\leq & (f_d(t))^2 \epsilon^{d-2} c_d \left\{ \left(\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor + 1 \right)^{d-2} - 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} 6(i+1)^{d-3} \right\} + c_d \epsilon^d \\
\leq & (f_d(t))^2 \epsilon^{d-2} c_d \left\{ \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 1 \right)^{d-2} - 1 + \int_1^{\frac{\sqrt{d}}{\epsilon}+1} 6(\xi+1)^{d-3} d\xi \right\} + c_d \epsilon^d \\
\leq & (f_d(t))^2 \epsilon^{d-2} c_d \left\{ \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 1 \right)^{d-2} - 1 + \frac{6}{d-2} \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 2 \right)^{d-2} - \frac{6}{d-2} 2^{d-2} \right\} + c_d \epsilon^d
\end{aligned}
$$

となる. ϵ は任意なので

$$
P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t\} \leq 7d^{\frac{d-2}{2}} c_d (f_d(t))^2
$$

となる. $d \geq 3$ のとき $4d^{d-1}c_d^2 > 7d^{\frac{d-2}{2}}c_d$ なので, 枝 $\{x_{k1}^1, x_{k1}^3\}$ と $\{x_{k2}^1, x_{k2}^3\}$ が同じ枝であるかどうかに関係なく

$$\begin{aligned} P\{0 < Z_{2,k1} \leq t, 0 < Z_{2,k2} \leq t\} &\leq 4d^{d-1}c_d^2(f_d(t))^2 \\ &= 4K_2^2 2^{2d} c_d^2 c_{d-1}^2 d^{2d-1} t^2 \end{aligned}$$

である. 定理 3.1 と同様にすると,

$$P\{Z^{(2)} \leq \delta\} \leq 4n^8 K_2^2 2^{2d} c_d^2 c_{d-1}^2 d^{2d-1}\delta^2$$

となる. したがって $L = \sqrt{d}$ であることに注意すると, $\delta = (2K_2 2^d c_d c_{d-1} d^{d-1/2} n^{4.5})^{-1}$ とおくと, 定理は証明される. □

また, 3 次元以上の問題に対する反復回数の期待値について, 以下の定理が成り立つ.

定理 4.3 $d(d \geq 3)$ 次元単位超立方体に節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義される問題において 2-opt は反復回数の期待値は $6K_2 c_{d-1} c_d 2^d d^d n^6 \log n$ 以下である.

証明. ϵ を任意の正数とすると, 定理 4.1 の証明と同様にして,

$$\begin{aligned} & P\{0 < Z_{2,k} \leq t\} \\ \leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} P\{0 < Z_{2,k} \leq t | i\epsilon \leq l(\{x_k^1, x_k^3\}) < (i+1)\epsilon\} P\{i\epsilon \leq l(\{x_k^1, x_k^3\}) < (i+1)\epsilon\} \\ & + P\{0 < Z_{2,k} \leq t | 0 \leq l(\{x_k^1, x_k^3\}) < \epsilon\} P\{0 \leq l(\{x_k^1, x_k^3\}) < \epsilon\} \end{aligned}$$

となる. $P\{i\epsilon \leq l(\{x_k^1, x_k^3\}) < (i+1)\epsilon\}$ は x_k^1 を中心とする半径 $i\epsilon$ と半径 $(i+1)\epsilon$ の d 次元の球の間に x_k^3 が存在する確率であるから, 式 (6), (12) により,

$$\begin{aligned} & P\{0 < Z_{2,k} \leq t\} \\ \leq & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \frac{K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t}{i\epsilon} \{c_d((i+1)\epsilon)^d - c_d(i\epsilon)^d\} + P\{0 \leq l(\{x_k^1, x_k^3\}) < \epsilon\} \\ \leq & c_d K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t \epsilon^{d-1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \frac{1}{i} \left\{ (i+1)^d - i^d \right\} + c_d \epsilon^d \\ = & c_d K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t \epsilon^{d-1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \left\{ \frac{i+1}{i}(i+1)^{d-1} - i^{d-1} \right\} + c_d \epsilon^d \\ = & c_d K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t \epsilon^{d-1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} \left\{ (i+1)^{d-1} - i^{d-1} + \frac{1}{i}(i+1)^{d-1} \right\} + c_d \epsilon^d \\ \leq & c_d K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t \epsilon^{d-1} \left\{ \left(\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor + 1 \right)^{d-1} - 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\sqrt{d}}{\epsilon} \rfloor} 2(i+1)^{d-2} \right\} + c_d \epsilon^d \\ \leq & c_d K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t \epsilon^{d-1} \left\{ \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 1 \right)^{d-1} - 1 + \int_1^{\frac{\sqrt{d}}{\epsilon}+1} 2(\xi+1)^{d-2} d\xi \right\} + c_d \epsilon^d \\ \leq & c_d K_2 c_{d-1} 2^d d^{\frac{d}{2}} t \epsilon^{d-1} \left\{ \left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 1 \right)^{d-1} - 1 + 2\left(\frac{\sqrt{d}}{\epsilon} + 2 \right)^{d-1} - 2^d \right\} + c_d \epsilon^d \end{aligned}$$

となる. ϵ は任意なので

$$P\{0 < Z_{2,k} \leq t\} \quad \leq \quad 3K_2 c_{d-1} c_d 2^d d^{d-\frac{1}{2}} t$$

がえられる. 定理 3.1 と同様にして,

$$E(T) \quad \leq \quad 6K_2 c_{d-1} c_d 2^d d^d n^6 \log n$$

が証明される. □

5 結論

今回われわれは, 確率分布にしたがって生成される TSP のいくつかの問題のクラスに対して λ-opt を行なった場合に, その反復回数が高い確率で多項式になること, さらに, 反復回数の期待値が多項式になることを証明した.

ユークリッド距離で定義される問題で, $\lambda \geq 3$ である λ-opt に対して, 同様な反復回数の多項式性が証明されるかどうかは興味深い問題である. しかし, 2-opt での証明よりも複雑な幾何的取り扱いが必要となるであろう.

参考文献

[1] Chandra, B.: Approximation and online algorithms for graph problems. Technical report TR-94-24, Department of Computer Science, University of Chicago, Chicago, IL, 1994.

[2] Chandra, B., Karloff, H. and Tovey, C.: New results on the old k-opt algorithm for the TSP. *Proceedings of the 5th Annual ACM SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1994), 150–159.

[3] Croes, G. A.: A method for solving traveling-salesman problems. *Operations Research*, Vol. 5 (1958), 791–812.

[4] Johnson, D. S.: Local optimization and the traveling salesman problem. *Automata, Languages & Programming : Proceedings 17th International Colloquium Warwick University, England*, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 446–461.

[5] Kern, W.: A probabilistic analysis of the switching algorithm for the Euclidean TSP. *Mathematical Programming*, Vol. 44 (1989), 213–219.

[6] Lin, S.: Computer solutions of the traveling salesman problem. *The Bell System Technical Journal*, Vol. 44 (1965), 2245–2269.

[7] Lin, S. and Kernighan, W.: An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem. *Operations Research*, Vol. 21 (1973), 498–516.

[8] Papadimitriou, C. H. and Steiglitz, K.: *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.

[9] Reinelt, G.: *The Traveling Salesman: Computational Solutions for TSP Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.