数理科学概論

阪　井　　　章

第1章　代数系

1.1　集合と写像

集合 set とは、ある一定の要件を備えたものの集まりである．集合に属するものを，その集合の**元（または要素）element** という．　a が集合 S の元であることを、記号で

$$a \in S$$

で表す．　ここでは，集合を表す記号として

$$\{x|\cdots\} \qquad \text{または} \qquad \{x:\cdots\}$$

を用いる．S が有限集合であるとき，その元の個数を $|S|$ で表す．　集合 A の元がすべて集合 B の元であるとき、A は B の**部分集合 subset** であるとい，

$$A \subset B$$

とかく．$A \subset B$ と $B \subset A$ が同時に成り立つとき、A と B は一致する．すなわち $A = B$ である．

２つの集合 A , B の両方に属するものの集合を A と B の**共通集合 intersection** といい、$A \cap B$ で表す．　また A か B のいずれかに属するものの集合を A と B の**合併集合 union**（または**和集合**）といい、$A \cup B$ で表す．A に属するが、B には属さないものの集合を $A \backslash B$ とかく：

$$A \backslash B = \{a|a \in A, a \notin B\}$$

元を持たない集合というものを考えると便利である．これを**空集合 empty set** といい、$\emptyset$ で表す．たとえば、A と B が共通部分をもたないとき、A と B は**互いに素である**というが，このことは　$A \cap B = \emptyset$ と書ける．

特定の１つの集合 E の部分集合だけを扱う場合には、補集合というものを考えることがある．　$A \subset E$ に対して $E \backslash A$ を (E における）A の**補集合**といい、A^c で表す．

A の元と B の元を組にしたものの集合：

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$$

を A と B の**直積 direct product** という．

集合 A の任意の元 x に対して B の１つの元 y を対応させる規則が与えられたとき、

この規則を A から B（の中）への**写像 mapping, map** という.

$$y = f(x), \qquad f : A \longrightarrow B \qquad x \mapsto y$$

などの記号で表す.
　B の集合

$$\{y \in B | \exists x; y = f(x)\}$$

を f の**像 image** または**値域**といい, $f(A)$ または Imf で表す．また，B の部分集合 S に対して，A の集合

$$\{x \in A | f(x) \in S\}$$

を S の f による**逆像 inverse image** といい、$f^{-1}(S)$ で表す.
とくに f が１対１対応であるとき，すなわち

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

が成り立つとき、f を**単射 injection** という．このとき, すべての $y \in f(A)$ に対して $y = f(x)$ を満たす $x \in A$ がただ１つに定まり, y を x に写す写像が定義される．これを f の**逆写像 inverse map** といい f^{-1} で表す．またこのとき，$f^{-1}(S)$ は f^{-1} による S の像になっている.（f^{-1} が定義されなくても, 逆像 $f^{-1}(S)$ は定義されることに注意.）
写像 $f : A \longrightarrow B$ において $f(A) = B$ が成り立つとき, f は A から B の**上への写像**である、または f は**全射 surjeion** であるという.
$B = A$ のとき, 写像 $f : A \longrightarrow A$ を**変換 transformation** ともいう．　もし f が全単射であるときには逆写像 f^{-1} を**逆変換**という.
集合 A から 集合 $\{0, 1\}$ への写像 f に対して,

$$S = \{x \in A : f(x) = 1\}$$

は A の１つの部分集合である．また，任意の部分集合 S はこの形で表される．A の元 x が S に含まれるときには，$f(x) = 1$，そうでないときには $f(x) = 0$ とすればよい．この f を S の**特性関数 characteristing function** という．A の部分集合と特性関数は 1 対 1 に対応する．　とくに，A が大きさ m の有限集合であるとき,A の部分集合の個数は，特性関数の個数 2^m に等しい．一般に, A の部分集合全部の集合を 2^A で表す.

1.2　数の集合

1.2.1　実数

　自然数 natural numbeer　１，2, . . .　全部の集合を $\boldsymbol{N}$ で表す.
整数 integer 全部の集合を $\boldsymbol{Z}$ で表す.
有理数 rational number 全部の集合は $\boldsymbol{Q}$ で表す.

実数 **real mumber** 全部の集合は $\boldsymbol{R}$ で表す.

　自然数 n に関する命題 $P(n)$ について,
［1］$P(1)$ は正しい
［2］すべての自然数 k について, $P(k)$ が正しいことを仮定すれば $P(k+1)$ が正しい
が証明されたとする. このとき, すべての自然数 n について $P(n)$ が成立する. これを**数学的帰納法** **mathematical induction** という.

$\boldsymbol{R}$ の中では**四則算法** **four arithmetic opertons** が定義される. すなわち、

$$a, b \in \boldsymbol{R} \Longrightarrow a+b \in \boldsymbol{R}, \quad a-b \in \boldsymbol{R}, \quad ab \in \boldsymbol{R}, \quad a/b \in \boldsymbol{R}$$

が成り立つ.　$\boldsymbol{Q}$ についても同じ事が成り立つ.　$\boldsymbol{Z}$ の中では算法

$$a, b \in \boldsymbol{Z} \Longrightarrow a+b \in \boldsymbol{Z}, \quad a-b \in \boldsymbol{Z}, \quad ab \in \boldsymbol{Z}$$

だけが成り立つ. また、$\boldsymbol{N}$ の中では算法

$$a, b \in \boldsymbol{N} \Longrightarrow a+b \in \boldsymbol{N}, ab \in \boldsymbol{N}$$

だけが成り立つ.

また, すべての $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して, **大小関係**

$$a < b, \quad a > b, \quad a = b$$

のうちいずれかが成り立つ.　さらに大小関係と算法の間の関係

$$a > b \Longrightarrow a+c > b+c$$

$$a > b,\ c > 0 \ \Longrightarrow\ ac > bc$$

が成り立つ. $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}$はいずれも、$R$ の部分集合であるから、同じ大小関係が成立する.

$\boldsymbol{R}$ においては次のことが成り立つ

アルキメデスの公理　$0 < a < b$ のとき, $b < na$ を満たす自然数 n が存在する.
これまでのことは、$\boldsymbol{R}$ でも $\boldsymbol{Q}$ でも同じように成り立つ. $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{Q}$ と分けるのは次の性質である.

Cantor の公理 $\boldsymbol{R}$ の 2 つの数列 $a_n,\ b_n$ が

$$a_n \leqq a_{n+1},\ b_n \geqq b_{n+1},\ a_n \leqq b_n \quad \text{かつ} \quad \lim(b_n - a_n) = 0$$

ならば、

$$\lim a_n = \lim b_n = c$$

となる実数 c が存在する.

これは次の性質と同等である. $\boldsymbol{R}$ の分割 $[A, B]$ というのは、

$$x \in A, y \in B \Longrightarrow x < y, \quad A \cup B = \boldsymbol{R},\ A \cap B = \emptyset$$

を満たす 2 つの集合 A, B の組である.

Dedekind の公理　$\boldsymbol{R}$ の任意の分割 $[A, B]$ に対して、A の最大数または B の最少数が存在する.

これらの公理は連続性の公理ともよばれる.

1.2.2　複素数

$S = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ とする. すなわち S は, 2つの実数の組

$$(a, b)$$

全部の集合である.

$$(a, b) = (a', b') \quad \Longleftrightarrow \quad a = a', b = b'$$

と約束していることに注意する. この S に 2つの演算, 積と和を次のように定義する：

和　：　$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

積　：　$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

これで四則演算が定義される. このとき, S を**複素数体 complex number field** といい, $\boldsymbol{C}$ で表す. $\boldsymbol{C}$ の元を**複素数 complex number** という.

S の部分集合

$$S_0 = \{(a, 0) \in S\}$$

を考える. 対応

$$a \to (a, 0)$$

は $\boldsymbol{R}$ と S_0 の 1 対 1 対応である. このとき, $\boldsymbol{R}$ の演算は S_0 の演算に対応する. したがって, S_0 は $\boldsymbol{R}$ と同じものと見なす. その元 $(a, 0)$ を単に a で表すことにする. これで $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$ が成り立つことになる. λ が実数であるとすると

$$\lambda(a, b) = (\lambda, 0)(a, b) = (\lambda a - b0, 0a + \lambda b) = (\lambda a, \lambda b)$$

が成り立つ．これはベクトルのスカラー倍である．すなわち，$\boldsymbol{C}$ は平面ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ の構造をもっている．

つぎに，$(0,1)$ を i で表す．すると，

$$(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$

であるから，$i^2 = -1$ である．また

$$a + ib = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$$

が成り立つので．複素数 (a,b) を $a+ib$ と書くことができる．これで複素数の定義が済んだ．

$$z = a + ib, \qquad a, b \in \boldsymbol{R}$$

において，a を z の**実数部分 real part**（または実部），b を**虚数部分 imaginary part**（または虚部）といい，

$$a = Rez, \quad b = Imz$$

で表す．$Imz = 0$ ならば z は実数である．$Imz \neq 0$ のとき z を**虚数 imaginary number** という．また

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を z の**絶対値 absolute value** という．

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$$

が成り立つ．また

$$\overline{z} = a - ib$$

を z の**共役複素数 conjugate complex number** という．$\overline{z} = z$ ということは z が実数ということである．

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad \overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

などが成り立つ．

$\boldsymbol{C}$ では大小関係を考えない． 算法との関係がうまくいかないからである． すなわち

定理 1.2.1 $\boldsymbol{C}$ においては
(1)$a > b \Longrightarrow a + c > b + c$
(2)$a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc$
が成り立つような大小関係は存在しない．

次の定理は基本的である．

定理 1.2.2 (de Moivre の公式)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n \in \boldsymbol{Z}$$

実数 x に対して

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

とおく．これを**オイラー (Euler) の式**という.

$$|e^{ix}| = 1, e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = (e^{ix})^{-1}, e^{2k\pi i} = 1\ (k \in \boldsymbol{Z})$$

が成り立つ．de Moivre の公式は、オイラーの式を用いれば次のように書ける.

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad n \in \boldsymbol{Z}$$

実数を直線上の点として表現するように、複素数を平面上の点として表すと便利である. x、y 平面の点 (x, y) と複素数 $x + iy$ を同一視したとき, この平面を**複素平面 個 complex plane**（または**ガウス平面**）という．このとき x 軸の点には実数が、また、y 軸の点には純虚数が対応するので、それぞれ**実軸、虚軸**という.
複素平面の点　$z = x + iy$ に対して，原点 0 と z との距離を r とし, z を表すベクトルと実軸の正の向きとのなす角を　θ とするとき,

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

と書ける．この θ を z の**偏角 argument** という．偏角は１つに定まらない.　θ が z の偏角であれば, $\theta + 2k\pi$ (k は整数）も同じ z の偏角である．z の偏角を $\arg z$ で表す．2π の整数倍を無視すれば次の等式が成り立つ.

$$arg(z_1 z_2) = arg z_1 + arg z_2$$

$|z| = 1$ 満たす z の集合は, 複素平面内の単位円
を表す．方程式 $z^n = 1$ の解は

$$z = e^{i2k\pi/n}, \qquad k = 0, 1, ..n-1$$

となるが, これらの複素数を表す点は, 単位円 $|z| = 1$ を n 等分する点である.