

数学的帰納法について

数学的帰納法とは次のようなものであった。

自然数 n に関する命題 $P(n)$ について、

[1] $P(1)$ は正しい

[2] 自然数 k について、 $P(k)$ が正しいことを仮定すれば $P(k+1)$ が正しいが証明されたとする。このとき、すべての自然数 n について $P(n)$ が成立する。

さて、次に述べる命題はすべて誤りであることを我々は知っている。いわば偽定理である。これらに、偽帰納法による偽証明を与える。それが偽証明である理由を見つけ出して欲しい。これができなければ、数学的帰納法が分かっているとは云えない。なぜなら、これらの偽証明は数学的帰納法の核心をついているからである。

偽定理 1 . すべての自然数について $n = n + 1$ (数は1つしかないのか)
(偽証明) $n = k$ のとき成り立つとする。すなわち

$$k = k + 1$$

この式の k に $k + 1$ を代入する ($k = k + 1$ であるからこれは可能である。)
すなわち

$$(k + 1) = (k + 1) + 1$$

これで $n = k + 1$ のときにも成り立つことが分かった。

偽定理 2 . 何円もっていても貧乏である (100億円持ってても貧乏人か)。
(偽証明) 自然数 n に対して

「全部で n 円もっている人は貧乏である」

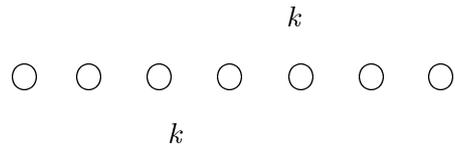
という命題を $P(n)$ としよう。

1円だけもっているものは貧乏である。すなわち $P(1)$ は正しい。

いま $P(k)$ は正しいとする。云いかえると、全部で k 円もっている人は貧乏であると仮定する。そのとき、1円増えても急に貧乏でなくなるわけでない。すなわち、 $P(k+1)$ は正しい。

偽定理3 . 白の碁石と黒の碁石を1つの碁笥(碁石を入れる容器)には
 入っている . このとき , その中のどの n 個も同色である . この場合勿論 n は
 入れてある碁石の個数以下である (混ぜて入れといたのに何でや!)
 (偽証明)「 n 個の石は , 白ばかりか , 黒ばかりである .」という命題を $P(n)$
 とする .

1 個の碁石は白か黒かどちらかである . すなわち , $P(1)$ は正しい .
 いま , $P(k)$ が正しいとする . $k+1$ 個の碁石を図のように1列に並べてみる :



左端の碁石を除いて考えると , 残りは k 個であるから , 白ばかりか黒ばかり
 のどちらかである . いま仮に白ばかりであるとする . 除いた1つを戻して , 右
 端の1つを除いてみる . このときも残りは k 個であるから , 白か黒ばかりで
 ある . したがって , もとの $k+1$ 個すべてが白である . 左端を除いたときに残
 りが黒ばかりと仮定すれば , 同じ推論で , もとの $k+1$ 個すべてが黒である .
 すなわち $P(k+1)$ は正しい .