数学的帰納法について

数学的帰納法とは次のようなものであった.

自然数 n に関する命題 $P(n)$ について,
［1］$P(1)$ は正しい
［2］自然数 k について, $P(k)$ が正しいことを仮定すれば $P(k+1)$ が正しいが証明されたとする. このとき, すべての自然数 n について $P(n)$ が成立する.

さて，次に述べる命題はすべて誤りであることを我々は知っている．いわば偽定理である．これらに，偽帰納法による偽証明を与える。それが偽証明である理由を見つけ出して欲しい。これができなければ，数学的帰納法が分かっているとは云えない。なぜなら，これらの偽証明は数学的帰納法の核心をついているからである.

偽定理１．　すべての自然数について $n=n+1$ (数は１つしかないのか)
（偽証明）$n=k$ のとき成り立つとする．すなわち

$$k=k+1$$

この式の k に $k+1$ を代入する.（$k=k+1$ であるからこれは可能である。）
すなわち

$$(k+1)=(k+1)+1$$

これで $n=k+1$ のときにも成り立つことが分かった。

偽定理２．　何円もっていても貧乏である（１００億円持ってても貧乏人か）.
（偽証明） 自然数 n に対して

「全部で n 円もっている人は貧乏である」

という命題を $P(n)$ としよう.
１円だけもっているものは貧乏である．すなわち $P(1)$ は正しい.
いま $P(k)$ は正しいとする．云いかえると，全部で k 円もっている人は貧乏であると仮定する．そのとき，１円増えても急に貧乏でなくなるわけでない.
すなわち， $P(k+1)$ は正しい.

偽定理３． 白の碁石と黒の碁石を１つの碁笥（碁石を入れる容器）にはいっている．このとき，その中のどの n 個も同色である．この場合勿論 n は入れてある碁石の個数以下である．(混ぜて入れといたのに何でや！)

(偽証明)「n 個の石は，白ばかりか，黒ばかりである．」という命題を $P(n)$ とする．

１個の碁石は白か黒かどちらかである．すなわち，$P(1)$ は正しい．

いま，$P(k)$ が正しいとする．$k+1$ 個の碁石を図のように１列に並べてみる：

k

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

k

左端の碁石を除いて考えると，残りは k 個であるから，白ばかりか黒ばかりのどちらかである．いま仮に白ばかりであるとする．除いた１つを戻して，右端の１つを除いてみる．このときも残りは k 個であるから，白か黒ばかりである．したがって，もとの $k+1$ 個すべてが白である．左端を除いたときに残りが黒ばかりと仮定すれば，同じ推論で，もとの $k+1$ 個すべてが黒である．すなわち $P(k+1)$ は正しい．