基礎数学

阪井 章

目 次

準　　　備

1. 複素数

複素数の定義と基本的な性質を述べる.

実数全部の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す. 2つの実数の組 (a,b) 全部の集合を考え

$$(a,b)=(a',b') \quad \Longleftrightarrow \quad a=a', b=b'$$

と約束する. この集合に2つの演算, 和と積を次のように定義する：

和　：　$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$

積　：　$(a,b)(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)$

これによって, この集合の中で四則演算が可能となる. このとき, この集合を**複素数体**といい, $\boldsymbol{C}$ で表す. $\boldsymbol{C}$ の要素を**複素数**という. $\boldsymbol{C}$ の要素で $(a,0)$ の形のもの全部の集合 S を考える. 対応

$$a \to (a,0)$$

は S と $\boldsymbol{R}$ と の1対1対応である. このとき, S の演算は $\boldsymbol{R}$ の演算に対応する. そこで, S は $\boldsymbol{R}$ と同じものと見なし, その要素 $(a,0)$ を単に a で表すことにする. これで $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$ が成り立つことになる. λ が実数であるとすると

$$\lambda(a,b)=(\lambda,0)(a,b)=(\lambda a-b0,0a+\lambda b)=(\lambda a,\lambda b)$$

が成り立つ. これはベクトルのスカラー倍と同じ演算である. すなわち, $\boldsymbol{C}$ はベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ の構造をもっている.

つぎに, $(0,1)$ を i で表す. すると,

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$$

であるから, $i^2=-1$ である. また

$$a+ib=(a,0)+(0,1)(b,0)=(a,0)+(0,b)=(a,b)$$

が成り立つので. 複素数 (a,b) を $a+ib$ と書くことができる.

複素数

$$z=a+ib, \qquad a,b \in \boldsymbol{R}$$

において, a を z の**実数部分**（または**実部**）, b を**虚数部分**（または**虚部**）といい,

$a=\mathrm{Re}\ z, \quad b=\mathrm{Im}\ z$

で表す. $\mathrm{Im}\ z=0$ ならば z は実数である. $\mathrm{Im}\ z\neq 0$ のとき z を**虚数**という. また

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

を z の**絶対値**という.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \qquad ||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1 - z_2|$$

が成り立つ．また

$$\bar{z} = a - ib$$

を z の**共役複素数**という.

$$\bar{z} = z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \text{ は実数}$$

である．その他

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\ z, \qquad z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}\ z$$

$$|\bar{z}| = |z| \qquad z\bar{z} = |z|^2$$

が成り立つ.

0 でない複素数 α と自然数 n に対して, α の n 個の積を α^n で表す．さらに

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

とおくことにより, すべての整数 n に対して α^n が定義され，指数法則

$$\alpha^n \alpha^m = \alpha^{n+m}, \qquad (\alpha^n)^m = \alpha^{nm}$$

が成り立つ.

注意 α が実数のときは, 整数でない実数 p に対しても α^p が定義されて指数法則が成り立つ. しかし, α が実数でないときは, α^p は多くの値をもつので，取り扱いに注意を要する.

実数 θ に対して

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

とおく．これを**オイラーの式**という．三角関数の性質から

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\theta + p} = e^{i\theta} \Longleftrightarrow p = 2n\pi i (n \text{ は整数})$$

が成り立つ．また数学的帰納法を用いると次の公式が証明される.

ドゥ・モアヴルの公式 $\qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (n \text{ は整数})$

2．複素数値関数の微積分

実数 x の区間 I で定義された関数 $f(x)$ が k 回微分可能で, $f^{(k)}$ が I で連続であるとき, $f(x)$ は

C^k**級**であるという．C^∞級関数は何回でも微分できる関数である．　関数 $f(x)$ の値が複素数である場合, それを実部と虚部にわけて

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

と書くことができる． $u(x), v(x)$ が連続（微分可能, C^k級, C^∞級) であるとき, $f(x)$ は連続（微分可能, C^k級, C^∞級) であるという．その導関数は

$$f^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x)$$

によって定義される．不定積分, 定積分も

$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$$

によって定義される．
したがって複素数値関数の微積分は，実数値関数の微積分に帰着される．ここでは，よく利用される指数関数についてだけ述べる．

複素数 $\alpha = a + ib$ に対して，実変数 x の指数関数 $e^{\alpha x}$ を

$$e^{\alpha x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

によって定義する．導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\alpha x} &= ae^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + be^{ax}(-\sin bx + i\cos bx)\\ &= e^{ax}(a + ibx)(\cos bx + i\sin bx)\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$$

が成り立つ．したがってまた，$\alpha \neq 0$ のときは

$$\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$$

となる．

3．べき級数

$$(P): \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

の形の級数をべき級数という． x_0 をこのべき級数の中心という．

級数 (P) は x の値によって収束したり発散したりする．$x = x_0$ では，必ず収束し，その値は a_0 に等しい．

定理 0.1　次の３つの場合だけが起こる．
(　) すべての x について収束する．
(　) $x = x_0$ 以外のすべての x について発散する．
(　) ある正数 R があって，$|x - x_0| < R$ において収束し，かつ，$|x - x_0| > R$ において発散する．

(　) の場合の R を，この級数の収束半径という．(　) の場合は，収束半径は $+\infty$，(　) の場合は，収束半径は 0 であるという．次のことが成り立つ

定理 0.2　収束半径が $0 < R \leqq +\infty$ であるとき，その和を $P(x)$ で表すと $P(x)$ は $|x - x_0| < R$ において無限回微分可能で，

$$P^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

この定理から次のことわかる．

(1) $a_n = P^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, ...$
(2) すべての n について $P^{(n)} = 0$ ならば $P(x) \equiv 0$ である．
(3) $P(x) \equiv 0$ ならば，すめての n について $a_n = 0$.

次の３つのことを注意しておく
() 中心が $x_0 = 0$ の場合は，べき級数は

$$(P) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の形をしている．この形はよく使われる
() 収束半径が $0 < R \leqq +\infty$ であるとき，$x_0 - R < a < b < x_0 + R$ ならば

$$\int_a^b P(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left[x^{n+1}\right]_a^b$$

() 変数 x は複素数でもよい．上のことは全部成り立つ．実はべき級数は複素変数で考えるのが本質的である．

4. 無限積分

無限区間での積分は有限区間での積分の極限として定義される．たとえば

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^a f(x)dx$$

その収束発散の基本となるのは次の例である．
$p > 0$ に対して

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & (1 < p) \\ +\infty & (0 < p \leqq 1) \end{cases}$$

２つの無限積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ と $\displaystyle\int_\infty^0 f(x)dx$ が両方とも収束するとき，無限積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ は収束するという．

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx + \int_\infty^0 f(x)dx$$

である．このことと

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^T f(x)dx$$

収束するということは違う．これは大事なことである．

有限開区間で定義された関数の積分は, この区間に含まれる閉区間での積分の極限として定義される. 基本となるのは次の例である.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \infty & (1 \leqq p) \\ \dfrac{1}{1-p} & (0 < p < 1) \end{cases}$$

5．線形代数より

実数全部の集合（実数体）$\boldsymbol{R}$ または複素数全部の集合（複素数体）$\boldsymbol{C}$ のどちらかを K で表す．集合 V について，２つの演算

$$V \times V \to V \qquad ((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$K \times V \to V \qquad ((\lambda,\boldsymbol{a}) \mapsto \lambda\boldsymbol{a})$$

が定義されて，次の性質を満たすとき，V は K **上の線形空間**という．

(V_1)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(V_2)　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

(V_3)　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

(V_4)　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

(V_5)　$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$

(V_6)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

(V_7)　$\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(V_8)　$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

例 1　$\boldsymbol{R}^n$ およびその部分ベクトル空間

例 2　$m \times n$ 行列全部の集合

例 3　I を実数 t のある区間とするとき

$$V = \{f : f(t) \text{ は } I \text{ で連続な関数 }\}$$

を考える．

$$(f+g)(t) = f(t)+g(t), \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t)$$

によって，和 $f+g$ およびスカラー倍 λf を定義する．また，零元は I のすべての t について値が 0 である関数とする．また,

$$-f(t) = (-1)f(t)$$

によって $-f$ を定義する．こうすると，V は上の条件をすべて満たし，線形空間となる．この空間を $C(I)$ で表す．

例 4　区間 I で 1 回微分可能で $f'(t)$ が連続な関数全部の集合 $C^1(I)$
　これは $C(I)$ の部分集合で，和，積，零元などは $C(I)$ と同じとする．

例 5　区間 I で k 回微分可能で $f^{(k)}(t)$ が連続な関数全部の集合 $C^k(I)$

例 6　区間 I で何回でも微分可能な関数全部の集合 $C^\infty(I)$

例 7　高々 n 次の多項式全部の集合
　高々 n 次の多項式は

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

の形をしている．この多項式と $n+1$ 次数ベクトル $(a_n, \cdots, a_0)$ とが 1 対 1 に対応しており，演算などがそのまま対応しているので，これは，線形空間として，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同じと見てよい．

　もう 1 つ重要な例は斉次線形微分方程式の解の空間である．
例 8　$P(t), Q(t)$ が I で連続であるとき

$$V = \left\{ y(t) \in C^2(I) : \frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = 0 \right\}$$

例 9　複素数ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$．普通は，スカラーは複素数とするが，$\boldsymbol{R}$ 上の線形空間とも考えられる．

　線形空間 V の要素 $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ が

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_m = 0$$

を満たすとき，$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ は **1 次独立**であるという．
　線形空間　V の要素 $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r$ が次の 2 つの条件を満たしているとき，$\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r\}$ は V の**基底**であるという:
(1)　$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r$は 1 次独立である．
(2)　すべての$\boldsymbol{z} \in V$ は$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r$の 1 次結合である：

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{a}_r$$

　1 組の基底があれば，無数の基底がある．しかし，基底のベクトルの個数 r は 一定である．この r を V の**次元**といい, $\dim V$ で表す．基底が存在しない場合は，V は無限次元であるという．例 1 は n 次元，例 2 は mn 次元，例 3-6 は無限次元，例 8 は 2 次元である．

　線形空間 V において，V の任意の 2 つの要素 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して実数 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を対応させる規則が与

えられていて，次の条件を満たすとき，V は**内積空間**であるといい，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ の**内積**という．

(1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ は負でない実数である

(2) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(3) $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}$

(4) $\langle \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle$

(5) $\langle \lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$

V の要素 $\boldsymbol{a}$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} >}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**という．V の $\boldsymbol{0}$ でない要素 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{0}$$

を満たすとき, $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ は**直交する**という．

n 次正方行列 A に対して，方程式

$$|A - xE| = 0$$

の解は，重複度を数えて，丁度 n 個ある．それらを $\lambda_1, .., \lambda_n$ とする．これを A の**固有値**という．λ が A の固有値であるための必要十分条件は，方程式

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

が非自明解 $\boldsymbol{x}$ をもつことである．この $x(\neq \boldsymbol{0})$ を λ に属する A の**固有ベクトル**という．

正則行列 P があって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となるとき，A は**対角化可能**であるという．実対称行列は対角化可能である．

第1章　フーリエ解析

性質のよく知られた関数を一般項とする級数によって, 与えられた関数を表すのが級数展開の基本的な考え方である. 一般項が $a_n x^n$ の場合がべき級数であり, 一般項が $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ の場合がこれから述べるフーリエ級数で

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の形をしている. その各項 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ は 2π を周期にもっているからその和も同じ周期をもつ. しかしその和が連続であるとは限らない. べき級数の和は, 解析関数とよばれる非常に限られた関数で, 不連続な関数を表すことができないのに対して, フーリエ級数は不連続な関数も表すことが可能である。このことがべき級数とフーリエ級数の大きな相違点である.

フーリエ級数の基本にあるのは, 三角関数列のもっている次の性質である. 自然数 n, m に対して

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx &= 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx &= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. これを三角関数列の**直交性**という. いま関数 $F(x)$ が

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

で与えられている場合を考えてみよう.　両辺に $\cos nx$ または $\sin nx$ をかけて積分して直交性を用いれば

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt dt$$

が得られる．そこで，一般の関数 $f(x)$ に対して

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt$$

とおいて，これからつくられる無限級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を $f(x)$ の**フーリエ級数**という．適当な条件のもとでこの級数は $f(x)$ に収束する．この級数に上のフーリエ係数の式を代入すると

$$\frac{1}{\pi}\Big\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(x-t)dt\Big\}$$

の形になる．　無限区間で定義された関数に対しては，フーリエ級数に相当するものとしてフーリエ積分を考える．適当な条件のもとで積分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt$$

は $f(x)$ に収束する．．

関数の値は複素数としておくほうが便利でである．また，応用上は連続関数だけでは不足で，不連続点をもつ関数も考える必要がある．ここで考える不連続点は，第１種不連続点と呼ばれるもので，その点で右側及び左側極限が存在するものである．点 c における関数 $f(x)$ の右側極限と左側極限は簡単に次の記号で表す．

$$f(c+0) \qquad f(c-0)$$

関数 $f(x)$ が，有限区間 $I=(a,b)$ の有限個の点 $c_1, c_2, ..., c_m$ を除いて連続で，

$$f(a+0),\ f(c_1-0),\ f(a_1+0), ...,\ f(c_m-0),\ f(c_m+0),\ f(b-0)$$

が存在するとき，$f(x)$ は I で**区分的に連続**であるという．$f'(x)$ が I で区分的に連続であるとき，$f(x)$ は**区分的に滑らか**であるという．

I が無限区間ののときは，I に含まれる任意の有限区間で $f(x)$ が区分的に連続 (区分的に滑らか）であるとき，I で区分的に連続 (区分的に滑らか）であるという．